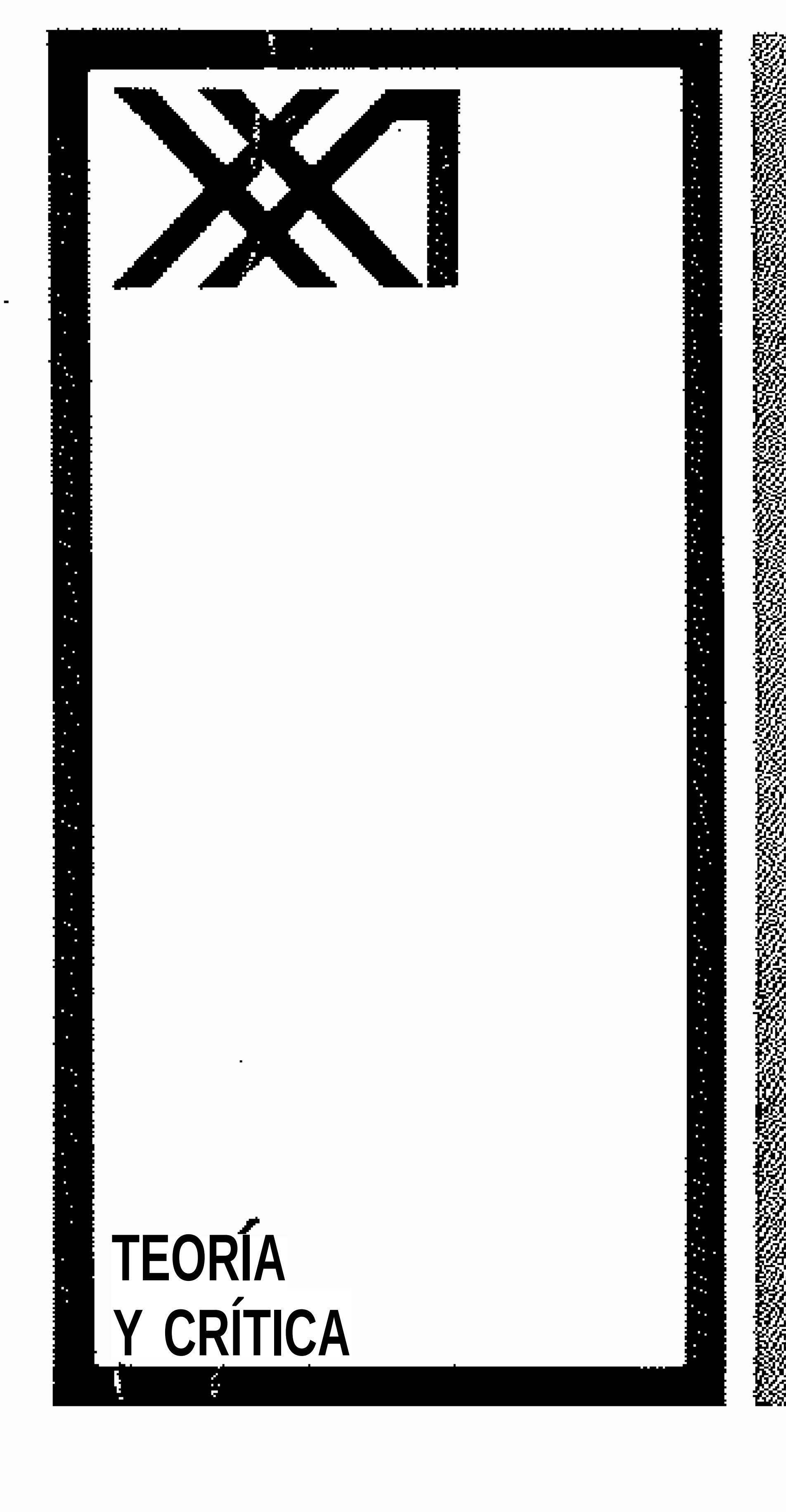
introducción a la filosofía de la matemática

STEPHAN KÖRNER



INTRODUCCIÓN A LA FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA

por

STEPHAN KÓRNER

traducción de

CARLOS GERHARD



MÉXICO
ARGENTINA
ESPAÑA

ÍNDICE

Primera edición en español. 1967

Gabriel Mancera 65 — México 12. D. F.

Primera edición en inglés, 1960

Hutchinson 8c Co. (Publishers) Ltd.
Título original: The Philosophy of Mathematics

Impreso y hecho en México
Printed and made in México

Del mismo modo que todo el mundo ha de aprender el lenguaje y la escritura antes de poder servirse libremente de ellos para la expresión de sus sentimientos, aquí sólo hay una manera de eludir el peso de las fórmulas. Y ésta consiste en adquirir tal dominio del instrumento. . . que, sin traba alguna de la técnica formal, podamos encaramos a los verdaderos problemas. . .

hermann weyl, *Raum, Zeit, ¿Malcríe,* § 18

PREFACIO

Este ensayo no pretende ser una introducción a la lógica matemática o a los fundamentos de la matemática, si bien los estudios y los resultados matemáticos le interesan. Allí donde se trata de éstos, he tratado de explicarlos breve y claramente, pero esforzándome siempre por evitar, en lo posible, los tecnicismos.

De las cuestiones que caen eñ el dominio de la filosofía de la matemática he concentrado principalmente mi atención en: I] la relación entre las tesis filosóficas y la construcción o la reconstrucción de las teorías matemáticas, y 2] la relación entre la matemática pura y la aplicada. Los capítulos i, n, rv y vi están dedicados a diversos puntos de vista que o son históricamente importantes o ampliamente compartidos en la actualidad. Los capítulos in, v y vn, por su parte, son de crítica y conducen, en el capítulo vni, a la proposición de una nueva posición filosófica.

Me complazco en dar las gracias a varios de mis amigos y colegas de la Universidad de Bristol por sus valiosos comentarios y críticas. Mi obligación principal es con J. C. Sheperdson, quien leyó la redacción definitiva del texto entero con gran atención y me evitó muchas imprecisiones, así como, cuando menos, un grave error. El profesor H. Heilbronn leyó el último capítulo desde el punto de vista de la matemática pura y el Dr. D. Bohm desde el de la física teórica. Por supuesto, no corresponde a estos colegas responsabilidad alguna por mis puntos de vista ni por cualesquiera errores que otros puedan encontrar.

El profesor J. W. Scott tuvo la amabilidad de leer la copia a máquina y de sugerir muchas mejoras de estilo

Finalmente, quiero dar las gracias al profesor H. J. Patón, por la amabilidad y la comprensión de que me hizo objeto durante la redacción del libro y, lo que es más, por animarme a escribirlo.

e independientemente de cualquier preparación especial, en tanto que otros sólo surgen tardíamente, en una especie de arduo viaje, por así decir, a través de alguna disciplina ajena a la filosofía.

Entre las cuestiones filosófico-matemáticas familiares a todo el mundo hay algunas que surgen del reflexionar sobre enunciados como los siguientes (los tres primeros pertenecen a la matemática pura, y los otros a la aplicada)

/] i -p 1 - 2;
2] Todo triángulo (euclidiano) equiángulo es al propio tiempo equilátero;
3] Si un objeto pertenece a una clase de objetos, digamos *a,* y si *a* está incluida en otra clase de objetos, digamos *b,* entonces el objeto en cuestión pertenece también a *b;*
-/] Una manzana y una manzana hacen dos manzanas;
5] Si los ángulos de un pedazo triangular de papel son iguales, sus lados son también iguales;
6] Si este animal pertenece a la clase de los gatos y si esta clase está incluida en los vertebrados, entonces este animal pertenece también a la clase de los vertebrados.

Al examinar tales enunciados, nos planteamos naturalmente preguntas por el estilo de éstas: ¿Por qué parecen ser necesaria, evidente o indudablemente verdad? ¿Son verdad, de este modo peculiar, porque se afirman acerca de objetos de alguna clase especial —digamos, de números, formas o clases?,¿o porque se afirman acerca de objetos en general, o “como tales objetos”?, ¿o bien son verdad, de este modo peculiar, porque no se afirman de objeto alguno en absoluto? ¿Débese su verdad al método particular con cuyo auxilio se formulan o se verifican —por ejemplo, un acto inmediato e incorregible de intuición o comprensión? ¿Cuál es la relación entre cada uno de los tres enunciados de matemática pura y su enunciado correspondiente de matemática aplicada?

La reflexión pasa gradual e inevitablemente de cuestiones matemáticas más familiares a otras menos familiares y más técnicas. Así, por ejemplo, cualquier intento de

INTRODUCCIÓN

Del mismo modo que la filosofía del derecho no legisla, ni la de la ciencia propone o verifica hipótesis científicas, así hemos de percatarnos también desde el principio de que la filosofía de la matemática no aumenta en modo alguno el número de los teoremas y teorías matemáticas. No es la matemática. Sí es reflexión sobre ésta, lo que da lugar a sus propias cuestiones y respuestas. Sin embargo, pese a la distinción, la conexión entre las dos materias ha de ser estrecha. En efecto, no cabe reflexionar con fruto sobre una materia en la que no estamos versados, y la reflexión sobre lo que estamos haciendo podrá ser provechosa volviendo más eficaz nuestro hacer.

A lo largo de toda su historia, la matemática y la filosofía se han influido recíprocamente. El contraste manifiesto entre el flujo indefinido de las impresiones de los sentidos y las verdades precisas y extratemporales de la matemática ha constituido una de las primeras perplejidades y uno de los primeros problemas no sólo de la filosofía de la matemática, sino de la filosofía en general; al paso que, por otra parte, las exposiciones filosóficas de la matemática en su relación con las ciencias empíricas y la lógica han sugerido problemas mantemáticos y han conducido inclusive a nuevas ramas de la matemática misma, como son las geometrías no euclidianas y las álgebras abstractas de la lógica matemática.

Toda vez que el pensamiento matemático no es solamente una ocupación altamente especializada, sino que forma parte también de la actividad corriente del vivir, los problemas de la filosofía de la matemática versarán igualmente sobre lo familiar en general y sobre temas técnicos. Esto no es en modo alguno peculiar de dicha filosofía: una división de esta índole se encuentra también por doquier en la filosofía. En efecto, algunos de sus problemas, tal vez los más importantes, se nos plantean a diario

de nuestros objetos de estudio por Platón, Aristóteles, Leibniz y Kant. La razón de esto no es en modo alguno la de proporcionar una perspectiva histórica, siquiera incompleta, sino que es el caso que estos filósofos expresaron a menudo en forma precisa y simple ideas que han constituido principios orientadores de las escuelas modernas de la filosofía de la matemática desde los tiempos de Boole y Frege, y parece natural, pues, que partamos de ellas.

Los capítulos restantes se dedicarán a un examen crítico de la escuela logística, cuyas raíces se remontan cuando menos a Leibniz; de la escuela formalista, algunas de cuyas ideas principales se encuentran en Platón y Kant, y de la escuela intuicionista, que deriva también de estos dos filósofos.

Parecerá sin duda indicado que el autor de un libro introductorio tenga ideas propias a propósito del tema y que, teniéndolas, halle espacio para su exposición. Haciéndolo así, en efecto, pondrá a sus alumnos cuando menos en condiciones de mirar en la dirección debida, al acecho de incomprensiones e interpretaciones erróneas posibles. Por consiguiente, terminaré el libro con la exposición de algunos de mis puntos de vista propios.

Toda vez que la filosofía de la matemática se ocupa principalmente de la exposición de la estructura y la función de las teorías matemáticas, podrá parecer acaso que aquélla sea independiente de cualesquiera supuestos especulativos o metafísicos. Sin embargo, cabe dudar, con todo, si semejante autonomía es posible siquiera en principio; si no se halla ya restringida por la mera elección de un aparato o una terminología especiales para tratar lo.s problemas del tema o, de hecho, por el tipo mismo del problema que se considera como importante. Y efectivamente, todas las filosofías de la matemática propuestas hasta el presente, y ciertamente las que se examinarán aquí, o se han desarrollado en el marco de algún sistema filosófico más vasto o han estado penetradas del espíritu de alguna *Wellanschauung* no formulada.

Semejantes supuestos filosóficos generales destacan de la manera más clara cuando el expositor de una filosofía de la matemática no se limita a llamar la atención sobre las características que algunas teorías matemáticas poseen

responder a preguntas sobre "1 -f- 1 — 2" nos obligará a colocar este enunciado en el contexto del sistema de los números naturales y tal vez, si es posible, de sistemas numéricos más amplios todavía. Y las preguntas que hemos planteado acerca del enunciado aparentemente aislado se extenderán inmediatamente al sistema o a los sistemas a los que pertenece. Y en forma análoga nos veremos obligados a investigar el sistema o los sistemas puros de la geometría y del álgebra de clases, así como la estructura de la aritmética, la geometría y el álgebra de clases aplicados. Investigación que planteará a su vez la cuestión de la estructura y la .función de las teorías matemáticas puras y aplicadas en general.

Por supuesto, las plenas consecuencias de la respuesta del filósofo a esta última cuestión central se harán más claras considerando la manera en que trata problemas más específicos y, en particular, los controvertidos. Uno de éstos —y uno de los más importantes— se refiere al análisis propio de la noción de infinito. Este problema surge en una etapa ‘temprana de la reflexión sobre las posibilidades al parecer ilimitadas de proseguir la serie de los números naturales y de subdividir la distancia entre dos puntos. Y vuelve a aparecer en todas las etapas ulteriores y más sutiles del filosofar acerca de las cantidades no concretas y continuas. Si en la historia de la matemática puede destacarse una nueva época, en ocasiones, por una nueva concepción de las cantidades y los conjuntos infinitos, esto es más cierto todavía de la historia de la filosofía de la matemática.

Estamos ahora en condiciones de indicar a título preliminar los objetos de nuestro presente estudio. Son éstos: primero, la estructura y función generales de las proposiciones y teorías que pertenecen a la matemática pura; en segundo lugar, la estructura y función generales de las proposiciones y teorías pertenecientes a la matemática aplícada y, en tercer lugar, las cuestiones acerca del papel de la noción de infinito en los diversos sistemas en los que aparece.

El procedimiento que habrá de adoptarse dependerá en gran parte de las exigencias de una introducción. Empezaré esbozando los puntos de vista sustentados a propósito

CAPÍTULO PRIMERO

ALGUNAS OPINIONES ANTERIORES

Existe casi general unanimidad en que en la segunda mitad del siglo xix se inició una nueva era en la filosofía de la matemática gracias a la labor de los Boole, Frege, Peirce y algunos otros filósofos de espíritu matemático y matemáticos de espíritu filosófico. El período que con ellos empieza tiene como característica más eminente el reconocimiento de la estrecha relación entre los dos campos de la matemática y la lógica, los cuales, en forma asaz curiosa, se habían desarrollado hasta allí completamente por separado. La necesidad de unas relaciones más estrechas la percibieron primero los matemáticos, en conexión, especialmente, con la teoría de los conjuntos. En efecto, la existencia, en ésta, de contradicciones cuyo origen no era claro les parecía exigir un análisis lógico, tarea, sin embargo, para la cual la lógica tradicional no era adecuada, pues era demasiado estrecha en su alcance e insuficientemente rigurosa en sus métodos. Había que desarrollar nuevos sistemas de lógica que estuvieran libres de aquellos defectos: que abarcaran los tipos del razonamiento deductivo y de la manipulación formal empleados en matemática, y que su precisión fuera la de los sistemas del álgebra abstracta. De hecho, la nueva era está dominada por los intentos de aclarar la matemática por medio de la lógica, de aclarar la lógica por medio de la matemática, y de llegar en esta forma a una concepción adecuada de la relación entre las dos disciplinas, si es que en realidad son dos y no una sola.

La abundancia de nuevas ideas, nuevas terminologías y nuevos simbolismos que acompañó a las nuevas formas de considerar a la matemática y la lógica no debe ocultarnos los elementos de continuidad entre la filosofía de la matemática prefregiana y la posfregiana. Los cambios re-

efectivamente, .sino que sostiene que todas las teorías ma-temáticas deberían poseerlas o afirma, lo que viene a se lo mismo, que todas las "buenas" teorías o "realmente in-teligibles" las poseen en verdad. La influencia general d las convicciones metafísicas, al prescribir," por ejemplo, má que describir la forma de un sistema numérico, se pone agudamente de manifiesto en controversias acerca del ca-rácter admisible o deseable, en semejante sistema, de la noción de agregados realmente infinitos, en cuanto opues-tos a agregados sólo potencialmente infinitos. Confundir la descripción y el programa —confundir el "es" con el "tendría que ser" o "debería ser"—, esto es tan pernicio-so en la filosofía de la matemática como en otra materia cualquiera.

dejarse describir con cierto grado de precisión, etc. Todos estos requisitos, especialmente el de la permanencia, son susceptibles de gradación y rigen, en esta forma, el empleo del término relativo "más real que". Platón es conducido así a concebir la realidad absoluta y las entidades absolutamente reales como límites ideales de sus correspondencias meramente relativas. Las entidades absolutamente reales —las Formas o Ideas— se conciben como independientes de la percepción, como susceptibles de una definición absolutamente precisa y como absolutamente permanentes, esto es, como extratemporales o eternas.

G. C. Field, uno de los autores que más penetra y congenia con el sistema de Platón, insiste mucho en la naturalidad de la transición de los conceptos y criterios relativos de la realidad a los absolutos.[1] Esta manera de ver no sólo brinda una explicación posible de cómo Platón se vio conducido a la teoría de las Formas, sino que representa su punto de vista central: las Formas comprenden no sólo los modelos ideales de los objetos físicos, sino también las situaciones ideales hacia las cuales el hombre debe esforzarse por llegar. En el presente estudio, sin embargo, sólo debemos ocuparnos de los primeros y, aun de éstos, sólo en la medida en que se relacionan con la filosofía de la matemática de Platón.

¿Qué entidades, necesitamos preguntar, son conformes a los criterios de la realidad absoluta? No, sin duda, los objetos que integran el universo físico, como las mesas, las plantas, los animales o los cuerpos humanos. Sin embargo, podríamos concebir para tan alto rango algún otro candidato interesante, por ejemplo, porciones indivisibles e indestructibles de materia o de conciencia, *si su* existencia se dejara demostrar. Si las almas humanas son de esta fiase, podríamos inclusive esperar una prueba de la inmortalidad. Como podríamos concebir también algunos candidatos más bien poeo interesantes. Podríamos considerar cualquier objeto común —más o menos transitorio e indefinido— , como una mesa, y sustituir en nuestra mente su carácter transitorio por la propiedad de permanencia, su carácter indefinido por el de la precisión, y sus

1 Field, *The Philosophy of Plato,* Oxford, 1949.

volucionarios afectaron los instrumentos del análisis lógico en mayor grado de lo que constituía su propósito. Sería totalmente erróneo sostener que los problemas filosóficos acerca de la estructura y función de los sistemas de la matemática pura y la aplicada, así como las diversas actitudes fundamentales frente a dichos problemas, habían cambiado al grado de no reconocerlos.

1] EL PUNTO DE VISTA DE PLATON

Para Platón una tarea intelectual importante, tal vez la más importante del hombre, consistía en distinguir la apariencia de la realidad. Es una tarea que se requiere no sólo del filósofo o el científico contemplativos, sino también, en mayor grado todavía, del hombre de acción y, en particular, del administrador o el gobernante, que han de orientarse en el mundo de la apariencia y han de saber lo que ocurre, lo que puede hacerse y lo que debería hacerse. Para conseguir un orden, teórico o práctico, en el mundo de las apariencias, que está en cambio constante, hemos de conocer la realidad, que nunca cambia. Solamente en la medida en que lo hagamos podremos comprender y dominar el mundo de la apariencia que nos rodea.

Descender de este elevado y hasta aquí árido plano de la generalidad filosófica a la filosofía de la matemática pura y aplicada de Platón —y de hecho también a su filosofía de la ciencia y la política—, presupone que puede darse luz a la distinción entre apariencia y realidad. Al intentarlo, Platón sigue ciertas sugestiones resultantes del empleo corriente por los griegos de las palabras correspondientes a nuestras “apariencia”, “realidad” y sus afines. Platón no infería de ahí que el empleo corriente no pueda acaso contener también sugestiones diversas o que sea la última norma de la comprensión filosófica.

Observó que la gente distingue por lo regular sin vacilar entre una mera apariencia y lo que es real. Su juicio es conforme a ciertos criterios más o menos claros. Así, por ejemplo, exigimos de un objeto real que su existencia sea más o menos independiente de nuestra percepción, que posea cierto grado de permanencia, que sea susceptible de

independientes del razonar que llamamos "punto", "línea", "círculo", etc., o sea, las Formas geométricas. Al enunciar que uno y uno son dos, o que la recta es la distancia más corta entre dos puntos, describimos estas formas y sus relaciones. Sin duda, cada una. de éstas tiene su multiplicidad de casos, habiéndose suscitado alguna duda y controversia acerca de la condición de tales casos. Se ha planteado la cuestión, en efecto, a propósito de qué piensa Platón, por ejemplo, de la doble presencia de "dos", en "dos y dos son cuatro", o de la doble presencia de la "recta", en "dos rectas que no tienen todos sus puntos comunes tienen a lo sumo un punto común". ¿Son tal vez todos los casos de "dos", esto es, los múltiples doses con los que opera el matemático, entidades separadas que deban distinguirse de la Forma de la dualidad, o debemos acaso decir que todo lo que se enuncia ostensiblemente acerca de los múltiples doses se enuncia en última instancia de la Forma única? Y un problema exactamente igual se plantea a propósito de los casos manifiestos de la "línea". Según Aristóteles (pero no, en modo alguno, según los comentaristas posteriores), Platón distinguía entre: a] las Formas aritméticas y geométricas, por una parte, y 6] las llamadas matemáticas por la otra, cada una de las cuales es un caso de alguna Forma única, comprendiendo cada Forma muchos casos tales.

La cuestión acerca de sí Aristóteles comprendió mal o si de hecho dio deliberadamente una interpretación equivocada de su antiguo maestro seguirá discutiéndose, creo yo, mientras haya autores platónicos y aristotélicos. Sin tomar partido en uno u otro sentido, vale la pena observar que la relación entre conceptos matemáticos como los de "número" o "punto" y sus casos manifiestos no constituye, en modo alguno, un problema banal. Nos la encontraremos cuando vayamos a examinar la naturaleza de las proposiciones existenciales matemáticas.

Hay, pues, un mundo de Formas —objetos intemporales, independientes del razonar y definidos— distinto del mundo de la percepción sensible. Se lo capta no por medio de los sentidos, sino de la razón. Y en la medida en que comprende las Formas aritméticas y geométricas, constituye la materia de estudio de la matemática. Una de las características curiosas de la matemática, cuando menos a

demás "imperfecciones" por las perfecciones correspondientes. El resultado sería la Forma de la mesa, de la que todas las mesas materiales sólo son copias imperfectas. Si esta clase de Forma se nos presenta más bien como poco interesante, esto se debe, creo yo, a que no puede aducirse razón alguna, en tal virtud no habría también una Forma correspondiente a cada clase de objetos físicos y a cada subclase de cada clase, hasta que finalmente la hubiera para cada cosa particular, esto es, no sólo la Forma de una mesa, sino también de una mesa alta o de otra baja, de una mesa cubierta y otra descubierta, etcétera.

No cabe duda alguna de que, en un momento u otro, Platón hubo de considerar los nombres genéricos, como el de "mesa", como nombres también de las Formas. Sin embargo, hay también, según creía Platón, algunas entidades mucho más familiares que las sillas ideales, que se conforman a los criterios rígidos a los que debe conformarse un objeto para clasificarse como real o como Forma. Tales son, por ejemplo, los números y los objetos de la geometría pura: sus puntos, líneas, planos, triángulos y demás. Y de hecho, puede sostenerse con fundamento que, en las etapas finales de su evolución, Platón sólo admitía dos clases de Formas, a saber, las matemáticas y las morales.

La precisión, la extratemporalidad y, en cierto sentido, su independencia con respecto al ser percibidos, esto es sin duda característico, para Platón, de los enunciados matemáticos, y el punto de vísta según el cual los números, las entidades geométricas y sus relaciones recíprocas poseen alguna existencia objetiva o, cuando menos, intersubjetiva, es perfectamente plausible. En términos generales podemos decir que el platonismo es una propensión filosófica natural de los matemáticos, especialmente de aquellos que se consideran a sí mismos como descubridores de nuevas verdades, más bien que de nuevas maneras de formular las anteriores, o como deductores de consecuencias lógicas explícitas ya implícitamente dadas.

Platón creía sin lugar a duda que hay objetos eternos, definidos e independientes del razonar, que llamamos "uno", "dos", "tres", etc., esto es, Formas aritméticas. Consideraba asimismo que hay objetos eternos, definidos,

ciertos aspectos durante períodos lo bastante prolongados como para permitirnos tratarlos como si fqeran permanentes. Así, por ejemplo, si comparamos el objeto real invariable uno con una manzana, cabe decir apropiadamente de esta última que es similar hasta cierto punto o, mejor todavía, que se *aproxima* a la Forma uno. Las frases técnicas de las que Platón se sirve habitualmente suelen traducirse diciendo que la manzana —en la medida en que aplicamos aritmética— *participa* de la Forma uno.

Lo que hemos dicho a propósito de la relación entre una manzana y la forma de la unidad se aplica asimismo a la relación entre un plato redondo, pongamos por caso, y la Forma de la circularidad. Podemos tratar el plato como si fuera un círculo geométrico, porque su figura se acerca a la Forma de la circularidad. Esta Forma, lo mismo que la de la unidad, no es captada por los sentidos, sino por la razón, esto es: captando su definición matemática o, como diríamos actualmente, comprendiendo la ecuación del círculo.

Para Platón, la matemática pura —que comprendía en su día parte de la aritmética y de la geometría euclidiana— describe las Formas matemáticas y sus relaciones. La matemática aplicada, en cambio, describe los objetos empíricos y sus relaciones, en la medida en que se aproximan a (participan de) las Formas matemáticas y sus relaciones. Podríamos acaso sentirnos tentados de decir que lo contrario de la aproximación es la idealización, y considerar el enunciado de que algunos objetos y relaciones empíricos se aproximan a las relaciones y objetos matemáticos como equivalente del enunciado en el sentido de que los objetos y relaciones matemáticos son idealizaciones de los empíricos. Sin embargo, no era tal el punto de vista de Platón. En efecto, éste no consideraba la matemática como una idealización por los matemáticos de ciertos aspectos del mundo empírico, sino como la descripción de una parte de la realidad.

2] ALGUNOS PUNTOS DE VISTA DE ARISTOTELES

La filosofía de la matemática de Aristóteles se ha desarrollado en parte en oposición a la de Platón, y en parte in-

partir de Leibniz, es que, pese al carácter cierto de sus v dades, no se esté en modo alguno universalmente de acu do, con todo, acerca de en qué las proposiciones matem ticas verdaderas son verdad, suponiendo que lo sean. Seg Platón, son verdad manifiestamente acerca de alg e es, acerca de las Formas matemáticas. Resulta fácil, p consiguiente, formular las respuestas a algunas de l guntas que enumeramos en la Introducción en nuestro fuerzo por delimitar, aun a grandes rasgos, los problema de la filosofía de la matemática.

La proposición 1 4- l = 2, y todas las demás propos ciones ciertas de la aritmética y la geometría, son *nece riamente* ciertas porque describen relaciones invariables entre objetos invariables, esto es, entre las Formas aritmé ticas y geométricas (o los casos igualmente invariables d las mismas). Su necesidad es independiente de que sea captadas o no por los descubridores de verdades matema ticas, independiente de cualquier formulación y, por co siguiente, de cualesquiera leyes que rijan un lenguaje na tural o artificial. Las verdades de la matemática so asimismo independientes de todo acto preliminar de con trucción. No es indispensable, por ejemplo, dibujar pun tos o rectas en el pizarrón, o "en nuestra mente", para esta en condiciones de contar o de efectuar operaciones y de mostraciones matemáticas; y no es indispensable, tampoco dibujar triángulos o cuadrados en un medio empírico o no, para demostrar el teorema de Pitágoras, pongamos por caso. Según Platón, la construcción no es más que una ne cesidad práctica del matemático, o una guia que se da a s mismo en vista del descubrimiento.

El punto de vista de Platón acerca de la relación entre "1 q- 1 = 2" y "una manzana y una manzana son dos manzanas", así como, en general, la relación entre la ma temática pura y la aplicada se deriva, lo mismo que su explicación de la matemática pura, de su distinción entre la realidad de las Formas y la irrealidad relativa de los ob jetos de la experiencia sensible. Estos últimos, en efecto, sólo hasta cierto punto son susceptibles de definición preci sa o independientes de las condiciones en que los captamos (en la percepción) . Por otra parte, tampoco son invaria bles, pese a que algunos de ellos no cambien mucho en

un miembro de la clase de las unidades matemáticas, del mismo modo que es roja en el sentido de que es un miembro de la clase de las cosas rojas. Y según la otra de las interpretaciones principales, la manzana empírica es una porque se aproxima a la unidad matemática, que hemos *abstraído* de éste y tal vez de otros objetos. Una alternativa similar se presenta si examinamos la relación entre un plato redondo y la circularidad geométrica.

Por mi parte me inclino a aceptar la segunda de las interpretaciones. Si lo hacemos así, el término "separar" de Aristóteles debería significar más bien abstracción idealizante o idealización que simplemente abstracción. Su explicación del objeto de la matemática quedaría en tal caso mucho más cerca de la de su maestro. Platón, de lo que a primera vista pareciera. Tendríamos que decir que, mientras Platón considera que la matemática lo es de Formas o, para servirnos de un término equivalente, de Ideas que existen independientemente de los matemáticos. Aristóteles, en cambio, cree que son matemática de idealizaciones efectuadas por éstos.

El punto de vista de Aristóteles acerca de la relación entre la matemática pura y la aplicada parecería, en esta forma, hacerse también más claro. En efecto, los enunciados de la matemática aplicada se aproximarían a los de la matemática pura: los enunciados a propósito de círculos dibujados podrían tratarse, con un margen suficientemente pequeño, como enunciados a propósito de círculos matemáticos. Sin embargo, Aristóteles no pudo adoptar la teoría de Platón según la cual la razón de que los enunciados matemáticos sean necesarios es que son descripciones de Formas eternas y de existencia independiente.

Y efectivamente, ni siquiera le hubiera sido posible hablar de una idealización verdadera o falsa, sino más bien de una que sería más o menos adecuada en relación con algún propósito dado. No obstante, aun si una teoría matemática es una serie de idealizaciones, no por esto necesitamos quedarnos sin una explicación de la necesidad. Podríamos encontrarla, en efecto, en la conexión lógica entre las diversas proposiciones de la teoría. En otros términos, la necesidad no se encontraría en un enunciado categórico particular cualquiera a propósito de objetos ma-

dependientemente de ésta. Rechaza la distinción de Platón entre el mundo" de las Formas, del que se dice que es la verdadera realidad, y la experiencia sensible, concebida solamente como una aproximación a aquel mundo. Según Aristóteles, la forma o esencia de cualquier objeto empírico, ya sea una manzana o plato, es parte del mismo al igual que su materia. Al decir que vemos una manzana o un plato redondo no entendemos o no deberíamos propiamente decir que la manzana se aproxima, en su unidad empírica, a una Forma invariable e independientemente existente de la unidad, ni que el plato se aproxima, en su circularidad empírica, a la Forma de la circularidad.

Aristóteles distingue con precisión entre la posibilidad de abstraer (literalmente "separar") la unidad, la circularidad y otras características matemáticas de objetos, y la existencia independiente de estas características o sus casos particulares, esto es, las unidades y los círculos. En efecto, insiste con frecuencia en que la posibilidad de abstracción no implica en modo alguno la existencia independiente de aquello que se abstrae o puede abstraerse. La materia de estudio de la matemática es el resultado de las abstracciones matemáticas que Aristóteles designa como "objetos matemáticos".

A su propósito cabe hacer cuando menos, según él, dos afirmaciones, a saber: fi] cada uno de ellos está en cierto modo *en* las cosas de las que es abstraído, y b] hay una multiplicidad de ellos, esto es, hay tantas unidades aritméticas, casos de dos, tres, etc., y tantos círculos, rectas, etc., como se necesitan en el cálculo o en la discusión geométrica. Otras características de los objetos matemáticos de Aristóteles son, al parecer, menos claras; por ejemplo, la relación entre una manaza y la unidad matemática, o entre un plato redondo y su circularidad matemática. Requieren atención especial dos interpretaciones posibles del importante texto aristotélico.

Según una de las interpretaciones principales, la manzana empírica es una en el sentido de que es un caso de la "unidad" universal matemática, del mismo modo que es roja en el sentido de que es un caso de la "rojez" universal. Una variante de esta interpretación sería la que dijera que la manzana empírica es una en el sentido de que es

ticas. En efecto, más importante que estos aspectos es la formulación detallada que nos ha dado del problema de la infinitud matemática, de la que su examen sigue revistien do gran interés. Fue el primero, de hecho, en percibir las dos formas principales de analizar la noción de infinito como actual y como meramente potencial, y fue el primero, también, que adoptó una decisión clara en favor de la se gunda de estas alternativas.

Aristóteles examina la noción de infinito en un pasaje conexo de su *Física.*[4] Distingue entre la posibilidad de aña dir una unidad más al último término de una serie cual quiera de números y, en particular, a la serie natural de los números: 1, 2, 3, . . . , y la posibilidad de proceder siem pre a otra subdivisión de una línea, pongamos por caso, entre dos puntos, recta dividida ya previamente cualquier número dado de veces. Aquí, la posibilidad de proceder *ad infinitum* es lo que puede entenderse al llamar infinita a la serie, o a la recta "infinitamente" divisible (esto es, compuesto de un número infinito de partes). Tal es la noción del infinito potencial. Pero cabría también conce bir tanto la noción de *todos los elementos de la serie de los números naturales y* —lo que parece más difícil— *to das las partes que ya no son ulteriormente divisibles de la linea* como siendo dados, en cierto sentido, en su totalidad integral. Ésta es una noción mucho más sólida de la infi nitud real.

Tratar de exponer y analizar los argumentos de Aristó teles en contra de la noción del infinito real nos llevaría a las sutilezas más elaboradas de la historia y el empleo lingüístico del griego. Nuestro interés; en cambio, está en la idea central que se halla detrás de dichos argumentos; ésta parece ser que un método que siguiera el procedi miento gradual, o sea el de efectuar el paso siguiente una vez dado el precedente, no implica que haya un paso últi mo, ni mentalmente ni de hecho.

El rechazo de la noción de infinito real es de impor tancia secundaria para el matemático que, según dice Aris tóteles, sólo necesita para los fines de la demostración matemática la noción de infinito potencial. Que Aristóte-

[4] Libro ni.

temáticos, sino en enunciados hipotéticos, esto es, en enunciados en el sentido de que si una determinada proposición es cierta, entonces otra proposición determinada es asimismo cierta necesariamente. Una autoridad eminente en matemática griega, Sir Thomas Heath, que ha estudiado minuciosamente todas las obras de Aristóteles reuniendo todos sus enunciados relativos a la matemática, confirma el hecho de que, para Aristóteles, la necesidad de la matemática era la misma que la de las proposiciones hipotéticas lógicamente necesarias. La prueba de este punto de vista, tal como lo cita Heath, se encuentra en sendos pasajes de la *Física* y la *Metafísica* respectivamente.[2] La concepción de Aristóteles se considera inclusive como "una especie de idea profética de alguna geometría basada en principios distintos de los euclidianos".[3]

Por otra parte, Aristóteles presta también mucha más atención de lo que hiciera Platón a la estructura de las teorías conjuntas, en la matemática, en cuanto opuestas a las proposiciones aisladas. Así, por ejemplo, distingue claramente entre: 7] los principios que son comunes a todas las ciencias (o bien, como diríamos hoy, los principios de la lógica formal implícitos en el desarrollo deductivo de toda ciencia), 2] los principios especiales que el matemático puesto a demostrar teoremas da por supuestos, 3] las definiciones que no suponen la existencia de lo que definen (por ejemplo, la definición del punto, de Euclides, como la de aquello que carece de partes), y 4] las hipótesis existenciales, que suponen que lo que se ha definido existe, independientemente de nuestro pensamiento y nuestra percepción. Tal parece que las hipótesis existenciales en este sentido no se requerirían en relación con la matemática pura.

La importancia de Aristóteles en la historia de la filosofía matemática reside no sólo en su adaptación de los puntos de vista de Platón a una metafísica que no necesita de la realidad de las Formas y la irrealidad relativa de los objetos sensibles; ni reside tampoco en su insistencia mayor en el análisis de la estructura de las teorías matemá-

2 *Física,* 11,9, 200, 15-19; *Metafísica,* S05P, 24-26.
8 *Mathematics in Aristotle,* Oxford, 1949, p. 100.

temática modernas, la de Leibniz acepta la doctrina aristotélica de la forma sujeto-predicado de todas las proposiciones. Lo que no le impide, con todo, anticipar movimientos modernos y, en particular, el logicismo moderno, juntando lógica y matemática. Mediante una doble innovación juntó estas dos disciplinas, que hasta allí habían estado completamente separadas. Por una parte, presenta una tesis filosófica acerca de la diferencia entre las verdades de razón y las verdades de hecho, así como de su carácter mutuamente exclusivo y conjuntamente exhaustivo. Por otra parte, introduce la idea metodológica de servirse del cálculo mecánico como auxiliar del razonamiento deductivo, no sólo en aquellas disciplinas que pertenecen tradicionalmente a la matemática, sino también más allá de éstas. Esto significa, en particular, la introducción del cálculo en la lógica.

Tanto para mayor precisión como en gracia a la brevedad de la exposición, lo mejor consiste en citar a partir de la *Monadologia,* en la que Leibniz, en 1714, o sea dos años antes de su muerte, da una sinopsis de su filosofía. "Hay también dos clases de *verdad* —dice—, la del *razonamiento* y la de los *hechos.* Las verdades del razonamiento son necesarias, y su contrario es imposible. Cuando una verdad es necesaria, su razón puede encontrarse mediante análisis, resolviéndola en ideas y verdades más simples, hasta llegar a las que poseen la primacía. . ."[5] Así, pues, las verdades de razón se basan, según la formulación de Leibniz, en el "principio de contradicción", al que considera comprender los principios de identidad y de tercero excluido. No sólo las tautologías banales, sino también todos los axiomas, postulados, definiciones y teoremas de la matemática son verdades de razón, o sea que son "*proposiciones idénticas,* cuyos opuestos implican contradicción expresa".[6]

Leibniz, según queda dicho, no sólo cree con Aristóteles que toda proposición se deja reducir en última instancia a la forma sujeto-predicado, sino que cree también que el sujeto "contiene" al predicado. Esto ha de ser así de

5 Edición de Latta, Oxford, 1898, p. 236.
6 *Op. cit.,* p. 237.

les tenga o no razón en este punto sigue siendo objeto de controversia. Como sigue siéndolo el punto de vista más radical de que la noción del infinito real no sólo no se necesita en la matemática, sino que es al propio tiempo la fuente ineludible de antinomias. Esta tesis más radical está expresada con menor claridad, y cabría argüir que Aristóteles admite la posibilidad del empleo congruente de series realmente infinitas en un sistema puramente matemático, no aplicable al universo físico.

3] LA FILOSOFÍA DE IA MATEMÁTICA EN LEIBNIZ

Lo mismo que Platón y Aristóteles antes que él, Leibniz desarrollo una filosofía de la matemática porque era un filósofo en el sentido más amplio de la palabra. Fue el autor de un sistema metafísíco de gran belleza y profundidad. Fue también, de hecho, un matemático, un físico teórico y muchas otras cosas más. Más aún, todas sus actividades y todos sus logros estaban sistemáticamente relacionados entre sí. Es el caso, sin embargo, que el sistema nunca fue presentado en su totalidad. En este aspecto se parece más a Platón que a Aristóteles. La mayor similitud con este último está en su conexión estrecha, casi podríamos decir en el paralelismo, entre sus doctrinas lógica y metafísica. En efecto,, la posición de Aristóteles en materia de lógica, en el sentido de que toda proposición es reductíble a la forma sujeto-predicado, tiene como paralelo su doctrina metafísica que afirma que el mundo consta de sustancias con atributos. La posición lógica más radical de Leibniz, de que el predicado de toda proposición está “contenido” en el sujeto, tiene como paralelo, por su parte, la célebre doctrina metafísica según la cual el mundo consta de sujetos contenidos en sí mismos, esto es, sustancias o mónadas que no actúan entre sí. La disputa de sus discípulos acerca de cuál de las dos sea más fundamental, si su lógica o su metafísica, revela la unidad de su pensamiento. Sea lo que fuera lo que pueda argüirse en un sentido u otro, la opinión según la cual consideraba a uno de los dos elementos como un apéndice sin importancia del otro se presenta como sumamente implausible.

A diferencia de la mayoría de las filosofías de la ma-

embargo, esta no se ocupa solamente de la matemática pura, sino también de la aplicada. En efecto, una exposición de la matemática aplicada ha de poner de manifiesto la relación entre las proposiciones matemáticas y las empíricas, y podría verse perfectamente afectada por una visión errónea o poco clara de estas últimas, o inclusive por la ausencia total de todo punto de vista. Esta observación se aplica no sólo a Leibniz, sino también a algunos de sus sucesores.

La concepción de Leibniz del objeto de la matemática pura es totalmente distinta de la platoniana o aristotélica. Para él, en efecto, las proposiciones matemáticas son como las proposiciones lógicas, en cuanto que no son ciertas de objeto eterno particular o de objeto idealizado alguno, producto de la abstracción, ni de hecho, de alguna otra clase de objetos. Son ciertas porque su negación sería lógicamente imposible. Pese a cualquier apariencia *prima fa-de* en contrario, la proposición matemática es tanto o tan poco "proposición de" un objeto o una clase de objetos particulares, como la proposición "Si algo es una pluma, es una pluma" lo es de mi pluma particular, de la clase de las plumas, o de la clase de los objetos físicos o de cualquier otra clase de objetos. Podríamos decir que ambas proposiciones son necesariamente ciertas de todos los objetos o de todas las situaciones posibles o, sirviéndonos de la célebre frase de Leibniz, *en todos los mundos posibles.* Todas estas formulaciones deben entenderse en el sentido de que las proposiciones matemáticas son ciertas porque su negación sería lógicamente imposible.

Pensemos de ello lo que queramos, es lo cierto, con todo, que es suficientemente claro, o tan claro, cuando menos, como la noción de una proposición cuya negación es lógicamente imposible o contradictoria en sí misma. Veamos ahora la explicación que da Leibniz de la relación entre "1 + 1 — 2" *y* "ima manzana y una manzana son dos manzanas" o, en forma más general, de la relación entre proposiciones correspondientes de la matemática pura y la matemática aplicada. Sin duda, podemos eludir la cuestión afirmando que —tal como queremos entenderlo— la segunda de las dos proposiciones es lógicamente equivalente (en algún sentido muy estricto) a la primera, y que nin-

todas las verdades de razón, que son de la forma sujeto-predicado, y por consiguiente, según él, de todas las verdades de razón en general. En cuál sentido deba considerarse que una verdad de hecho —digamos, la verdad de que mi pluma estilográfica es negra— tiene un sujeto que contiene a su predicado, esto es mucho menos claro. En efecto, con objeto de explicar el significado de su aserto en el sentido de que el sujeto *de una verdad de hecho* contiene a su predicado, Leibniz se ve obligado a introducir las nociones de Dios y de infinito. La reducción de una proposición contingente, que expondrá su predicado como contenido en su sujeto, sólo es posible para Dios. Leibniz explica esto diciendo que, lo mismo que en el caso de las razones de números irracionales, "la reducción implica un proceso infinito y se aproxima, sin embargo, a una medida común, de modo que se obtiene una serie definida pero interminable, así requieren también las verdades contingentes un análisis infinito que sólo Dios puede efectuar”. [7]

Otra dificultad- a propósito de las verdades de hecho resulta del principio de razón suficiente, “que afirma que *nada tiene lugar* sin razón suficiente, lo que equivale a decir que nada ocurre sin que sea posible, para quien conozca las cosas suficientemente, dar una razón suficiente para decidir que las cosas sean como son, y no de otro modo”. [8] Esto es para Leibniz no solamente una exhortación general a buscar razones suficientes según nuestras máximas posibilidades, sino que en alguna forma es también, lo mismo que el principio de contradicción, un principio de inferencia y análisis. Sin embargo, la manera en que éste deba aplicarse no se especifica claramente, y-en muchos casos, si no en todos, solamente Dios conoce las cosas en grado suficiente para hacer posible su aplicación eficaz.

Podría acaso parecer que la explicación leibniziana de las verdades de hecho, no reviste importancia alguna desde el punto de vista de su filosofía de la matemática. Sin

[7] *De Scientia Universali seu Calculo Philosophico,* **Latta, p. 62.**

8 *Principes de la nature et de la gráce fondés en raison,* **Latta, p. 414.**

Por otra parte, Leibniz hubo de percatarse de la imposibilidad práctica de dominar deducciones realmente complicadas sin un sistema de símbolos adecuado. Hubo de encontrar —en particular en sus estudios de las posibilidades de una matemática de los "infinitesimales— que el descubrimiento de un simbolismo para la representación de enunciados y demostraciones, por una parte, y la comprensión de su estructura lógica, por la otxa aunque separables mentalmente, rara vez lo eran de hecho.

La representación concreta en símbolos adecuados de una deducción complicada es, según sus propias palabras, un "hilo de Ariadna" que guía la mente. El programa de Leibniz está ante todo en crear un método de elaborar y disponer caracteres y signos de tal modo que representen pensamientos, es decir: que estén relacionados unos con otros tal como lo están los pensamientos correspondientes/[9] Esta idea anticipa exactamente una de las doctrinas centrales del *Tractatus Logico-Philosophicus de* Wittgenstein. Adopta en la mente de Leibniz muchas formas, una de las cuales implica la aritmetizacíón de la lógica y nos recuerda uno de los famosos métodos de Güdel, al que habremos de referirnos brevemente en un capítulo ulterior.[10]

Una vez en posesión de una *characteristica universales,* que representa pensamientos en sus relaciones recíprocas por medio de símbolos en relaciones correspondientes, necesitamos un método de razonamiento simbólico o cálculo: necesitamos aquello que promete, aunque sin cumplirlo por completo, el título de *Calculas Raliocinator, seu ariificíiim facile et infallibiter ratiocinandi. Res hadeñus ignorata'H* Lo que Leibniz tiene que decir acerca de la simbolización del razonamiento deductivo está lleno de intuiciones proféticas, que van desde la percepción clara de tareas posibles hasta indicaciones vagas. Un historiador de la filosofía que intentara demostrar que no hay nada verdaderamente nuevo bajo el sol se vería sin duda recompensado leyendo los escritos póstumos de Leibniz. Sin embar-

° Citado por Becker, *Die Grundlagen der Mathematik,* Fríburgo, 1954, p. 359.

1° Véase *Elementa Characteristicae universales,* edición de Leibniz por Couturat, París, 1930, pp. 4255.

11 Couturat, *op. cit.,* p. 239.

guna de ellas trata ya sea de manzanas o de la operación de juntarlas o, inclusive, del universo físico en absoluto.

No propongo, por mi parte, eludir la cuestión, y decido entender que la segunda proposición lo es de matemática aplicada o de una física muy simple. Y esto porque sabemos que semejante decisión es la que se requiere en toda consideración de las leyes de la física newtoniana, de la relatividad o de la teoría de los cuanta, etc., a menos que queramos sostener que toda la física matemática o toda la matemática aplicada son a *príort y* no contienen mayor información que la que contiene la matemática pura. Nuestra decisión tiene la ventaja, en otros términos, de excluir dificultades de carácter no filosófico de una cuestión que es ya harto difícil filosóficamente en sí misma.

La filosofía de la matemática de Leibniz no nos es de mucho auxilio. Según ella, en efecto, "1 + 1 = 2" (enunciado de matemática pura) es cierto sobre la base de la ley de contradicción y, en consecuencia, en todos los mundos posibles, en tanto que "una manzana y una manzana son dos manzanas" (enunciado de física) es cierto en este mundo que Dios estaba obligado a crear si, por el principio de razón suficiente, había de tener razón suficiente para crearlo, esto es, si había de ser el mejor de todos los mundos posibles. En esta forma, la relación entre la matemática pura y la aplicada está dada de modo muy directo —y no meramente en "último análisis"— en términos teológicos. La explicación de las proposiciones empíricas de Leibniz y, por consiguiente, de la relación entre la matemática pura y la aplicada ya no la aceptan ni quienes aceptan, a grandes rasgos, su concepto de la matemática pura.

Si, a los ojos de los que aceptan su filosofía, el análisis de Leibniz de la lógica y la matemática enlaza estas materias, su idea metodológica de introducir cálculo en todos los temas que tratan de las relaciones deductivas conduce, en cambio, una vez más, a una aproximación entre la lógica y la matemática, aparte inclusive, esta vez, de todo punto de vista filosófico especial. Para Platón, según vimos, el dibujo de diagramas de diversas clases y el empleo, según podemos presumir, de elementos de notación fueron medios auxiliares ocasionales. Cabía prescindir de ellos.

percepción sensorial. Son necesarias en el sentido de que, si cualquier proposición acerca del mundo físico, y en particular cualquier proposición de las ciencias físicas, ha de ser cierta, también ellas han de ser ciertas. En otros términos: las proposiciones sintéticas *a priori* son condiciones necesarias de la posibilidad de la experiencia objetiva.

No es éste el lugar para emprender un examen crítico del argumento de Kant en apoyo de la tesis de que algunas proposiciones son a la vez sintéticas y *a priori.* Ni podemos considerar tampoco su pretensión de haber proporcionado las premisas para una lista sistemática y completa de todas aquellas proposiciones: semejante lista permanecería inafectada por cualesquiera cambios en las matemáticas o las ciencias naturales. Kant divide luego las proposiciones sintéticas *a priori* en dos clases, esto es, en "intuitivas" y "discursivas". Las intuitivas se relacionan ante todo con la estructura de la percepción y del juicio perceptivo, y las discursivas con la función ordenadora de las nociones generales. Un ejemplo de una proposición sintética *a priori* discursiva es el del principio de causalidad. Todas las proposiciones de la matemática pura pertenecen a la clase intuitiva de las proposiciones sintéticas *a priori.* De ahí que debamos empezar por centrar nuestra atención en ellas.

Si consideramos cualquier juicio perceptivo sobre el mundo físico, por ejemplo, "mi pluma es negra", "mi pluma está entre dos lápices", parece plausible decir que su verdad o falsedad dependen no sólo de las definiciones y reglas de la lógica formal, sino también de su correspondencia o falta de correspondencia con la situación perceptiva que describen. La relación entre "pluma" y "negra" no se encuentra analizando estos conceptos, sino que se funda en la experiencia. Es igualmente posible distinguir con Kant dos aspectos en cualesquiera percepción o proposición de objetos externos, esto es, el material empírico situado en el espacio y el tiempo, y el tiempo y el espacio en que dicho material se sitúa. Si suponemos que la estructura del espacio y el tiempo sensibles permanecen inafectados por los cambios en el material empírico y que no puede haber percepción que no se sitúe a la vez en el tiempo y el espacio, entonces podríamos considerar el tiem-

go, una introducción crítica a la filosofía de la matemática como la que estamos emprendiendo ha de ocuparse en lo posible más bien de ideas plenamente desarrolladas que de ideas en germen.

4] kant: algunas de sus ideas

El sistema filosófico de Kant se desarrolló bajo la influencia de la filosofía racionalista representada principalmente por Leibniz y de la filosofía empirista representada principalmente por Hume y en oposición consciente a una y otra. Tanto Hume como Leibniz dividen todas las proposiciones en dos clases exclusivas y exhaustivas, esto es, en proposiciones analíticas y factuales, y ambos filósofos consideran las proposiciones matemáticas como analíticas.[32] En cambio, Hume y Leibniz difieren radicalmente acerca de las proposiciones factuales. A propósito de las de matemática pura, Hume no dice en conjunto gran cosa, y lo que dice reviste además poca importancia. Por consiguiente, en la medida en que es polémica, la filosofía de la matemática de Kant se dirige principalmente contra Leibniz.

Con objeto de ir directamente al meollo de la cuestión y de exponer la conexión con el resto de su sistema filosófico, lo mejor será considerar la clasificación triple de las proposiciones con la que Kant remplaza la dicotomía de Leibniz y Hume. La primera de sus clases, la de las proposiciones analíticas (esto es, proposiciones cuya negación es contradictoria en sí), coincide con las proposiciones analíticas de Hume y Leibniz. En cuanto a las proposiciones no analíticas o sintéticas, Kant distingue dos clases, a saber, las que son empíricas o *a posleriori* y las que son no empíricas o *a priori.*

Las proposiciones sintéticas *a posleriori* dependen de la percepción sensible, en cuanto que toda proposición *a posleriori,* si es cierta, ha de describir una percepción posible de los sentidos (mi pluma es negra) o implicar lógicamente proposiciones que describan percepciones de los sentidos (todos los cuervos son negros). Las proposiciones sintéticas *a priori,* en cambio, no dependen de la

12 Véase Hume, *Trealise,* libro i, parte ni, sec. xiv.

ciones son independientes de las impresiones sensibles, o sea *a priori.*

Kant no acepta el punto de vista de la matemática pura que las haría objeto de definiciones y de entidades postuladas comprendidas bajo éstas. Para él, en efecto, la matemática pura no es analítica, sino sintética *a priori,* toda vez que es del tiempo y el espacio (los describe). Sin embargo, si su explicación de la matemática se hubiera detenido aquí, no habría ciertamente esperado poder explicar la riqueza y variedad de la matemática conocida a la sazón. En efecto, la descripción del espacio —del espacio sensible, por supuesto— difícilmente podría haber ido mucho más allá de la afirmación de sus tres dimensiones ni la descripción del tiempo podría haber ido mucho más allá de afirmar que es unidimensional y dirigido. De hecho, tal parece que la influencia de Kant sobre los pensadores posteriores haya sido (en gran parte) a través de su desarrollo ulterior del punto de vista de que las proposiciones matemáticas son descripciones del espacio y el tiempo. Para caracterizar brevemente este desarrollo ulterior, diremos que Kant no admite que la descripción completa de la estructura del espacio y el tiempo requiera una contemplación meramente pasiva, sino que presupone, antes bien, la actividad de la construcción. "Construir un concepto" es ir más allá de proponer o consignar su definición: consiste en proveerlo de un objeto *a priori.* Lo que Kant entiende con esto será tal vez difícil de comprender, pero no es en modo alguno oscuro o confuso. Queda perfectamente claro lo que implica o no implica la construcción de un concepto. No significa, en todo caso, *postular* objetos para el mismo.

Por ejemplo, el concepto de una esfera de quince dimensiones congruente por sí misma no puede construirse, pese a que podamos (y debamos) *postular* objetos para ella si es que vamos a enunciar que en un "espacio" de cuando menos quince dimensiones "se cumplen" cuando menos dos esferas sin ningún "punto" común. En cambio, podemos construir, y no meramente postular, una esfera tridimensional, o un círculo (esfera bidimensional), en un espacio de tres dimensiones. Su construcción resulta posible no sólo por la congruencia en sí del concepto de "es-

po y ei espacio como la forma de todas las percepciones, y ver la materia de la percepción en todo aquello que no pertenece a la forma.

El estar situada en el tiempo y el espacio es una condición necesaria de la posibilidad de la percepción o, cuando menos, según lo subraya Kant, de la percepción humana. La pregunta acerca de si espacio y tiempo son objetos particulares o nociones generales y, especialmente, relaciones —si son más como los objetos físicos o como propiedades de éstos o relaciones entre ellos—, Kant la responde en favor de la primera alternativa. Su principal razón para ello consiste en la diferencia entre la clase de divisibilidad que pertenece a los objetos particulares y la que corresponde a las nociones generales. Dividir un objeto particular, una manzana por ejemplo, es cortarla en pedazos. Dividir una noción general, en cambio, es dividirla en nociones subordinadas. Espacio y tiempo son divisibles, Y así lo considera Kant, no tal como la propiedad de "coloreado" se divide en los diversos colores distintos, sino más bien tal como la manzana es dividida en pedazos. El espacio es *más bien como* una caja, y el tiempo *más bien como* un río.

Sin embargo, el espacio-caja y el tiempo-río son objetos particulares de una clase muy especial. Son en cierto níodo, en efecto, como unos recipientes invariables *en los* que se encuentra el material de la percepción, pero no son parte del material empírico cambiante de la percepción misma. En el hecho de ser elementos invariables, el espacio y el tiempo recuerdan las Formas de Platón. Sin embargo, la analogía)?o es muy estricta. Kant supone que no son absolutamente ("trascendentalmente") reales. Solamente son reales en la medida en que son las condiciones en que los seres capaces de percepción y de pensamiento general pueden tener experiencias objetivas.

Podemos ver ahora cómo son posibles juicios sintéticos *a priori* de la clase intuitiva. Porque: a] al describir el espacio y el tiempo, describimos entidades particulares, lo que significa que formamos juicios sintéticos, en tanto que, b] al describir el espacio y el tiempo, describimos no impresiones sensibles, sino las matrices permanentes e invariables de las mismas, lo que significa que nuestras descrip-

var que no se niega la posibilidad lógica de aritméticas alternativas. Lo que se afirma es que estos sistemas no serían descripciones del espacio y el tiempo perceptibles.

Podemos formular ahora a grandes rasgos las respuestas de Kant a nuestras preguntas a propósito de la naturaleza de la matemática pura y aplicada. Las proposiciones de la aritmética y la geometría puras son proposiciones necesarias. No obstante, son proposiciones sintéticas *a priori,* no analíticas. Son sintéticas porque son acerca de la estructura del espacio y el tiempo tal como lo revela lo que en éstos puede construirse. Y son *a priori,* porque espacio y tiempo son condiciones invariantes de toda percepción de objetos materiales. Las proposiciones de la matemática aplicada, por su parte, son *a posteriori* en la medida en que son acerca del material empírico de la percepción, y son *a priori* en la medida en que son acerca de espacio y tiempo. La matemática pura tiene su objeto de estudio en la estructura del espacio y el tiempo, libre de material empírico. La matemática aplicada, en cambio, tiene su objeto de estudio en la estructura del espacio y el tiempo juntamente con el material que la llena.

La idea kantiana de la construcción como fuente de los ejemplos de conceptos matemáticos, cuya congruencia interna está acordada, es supuesta o no se discute, cuando menos, cuenta con muchos descendientes identificables en la evolución ulterior de la filosofía de la matemática. Y su análisis del concepto de infinito ha ejercido una influencia similar. Recuerda en muchos aspectos la doctrina de Aristóteles, con la diferencia de que, en la distinción de Kant entre lo actual y lo potencial, el concepto de infinito resulta más claro todavía.

En la serie o la progresión matemática, una regla nos dice cómo debe efectuarse el paso siguiente una vez ejecutado el anterior. Kant no admite el supuesto de que, una vez dada semejante regla, esté dada también necesariamente en alguna forma la totalidad de todos los pasos. Consideremos, por ejemplo, la sucesión natural de los números, de los que el primer término es cero, siendo producido cada término ulterior por la adición de 1 a su predecesor —en el supuesto de que no haya otros términos en la serie. La sucesión, en cuanto crece de acuerdo con la regla, es

fera tridimensional", sino por ser el espacio perceptible lo que es. La construcción *a priori* de una esfera física tridimensional no debe confundirse con la construcción de una esfera, digamos, de madera o de metal. Sin embargo, la posibilidad de la construcción material se basa en la posibilidad de la construcción *a priori* —la esfera de metal en la posibilidad de una esfera en el espacio—, exactamente del mismo modo que la imposibilidad de la construcción material de una esfera de quince dimensiones se basa en la imposibilidad de la correspondiente construcción *a priori.*

La distinción que efectúa Kant en la introducción de la *Critica de la razón pura,* segunda edición,[13] *y* en otros lugares, entre el pensamiento de un concepto matemático, que sólo requiere congruencia interna, *y* su construcción, que requiere que el espacio sensible tenga una determinada estructura, es de la mayor importancia para la comprensión de su filosofía. Kant no niega la posibilidad de geometrías congruentes distintas de la euclidiana ordinaria, y en este aspecto no ha sido refutado por el desarrollo actual de tales geometrías.

Se dice algunas veces que el empleo de una geometría "euclidiana" de cuatro dimensiones en la teoría especial de la relatividad, o de una geometría no euclidiana en la teoría general de la relatividad, ha demostrado que Kant estaba en el error al sostener que el *espacio de la percepción* era euclidíano. Por mi parte afirmaría, antes bien, que estaba en el error al suponer que el espacio perceptible está descrito por la geometría euclidiana tridimensional. Pero afirmaré al propio tiempo que el espacio perceptual no está descrito ni por la geometría euclidiana ni por la no euclidiana. El argumento mismo, sin embargo, ha de dejarse para después de haber examinado otras cuestiones.

La explicación de Kant de las proposiciones de la aritmética pura es similar a su explicación de la geometría pura. La proposición de que al añadir 2 unidades a 3 unidades producimos 5 unidades describe —sintéticamente y *a priori*— algo construido en el tiempo y el espacio, esto es, la sucesión de unidades y su reunión.[14] Conviene obser-

[13] Ed. ac., vol. 3, p. 9.
[14] Véase, por ejemplo, *Prolegomena,* § 10, ed. ac., vol. 4.

mente atiende ahora a la voz de la razón, la cual, para todas las magnitudes dadas. . . requiere totalidad. . . sin excluir siquiera de este requisito al infinito, sino que, antes bien, hace inevitable que nosotros consideremos este infinito. . . como totalmente dado (esto es, como dado en su totalidad) *'.ib

Esta transición de la idea del infinito potencial construible a la del infinito real no construible es, en opinión de Kant, la raíz principal de confusión en metafísica. El que sea necesaria, deseable, objetable o indiferente *en el seno de la matemática,* es una cuestión que divide a las escuelas contemporáneas de la filosofía de la matemática en mayor grado, tal vez, que cualquier otro problema.

15 *Critica del juicio,* § 26.

totalmente distinta de la sucesión en cuanto terminada, y la afirmación de que el proceso de producir miembros ulteriores de la serie puede proseguir indefinidamente, no implica que pueda completarse o que la serie completa pueda considerarse, en este sentido, como dada.

La distinción kantiana entre el infinito potencial, o el infinito *qua* “devenir”, y el infinito real o completo es muy parecida a la distinción aristotélica, pero la explicación de Kant de la noción del infinito real difiere considerablemente de la de Aristóteles. Según éste, en efecto, no sólo no se dan casos de infinito real sin experiencia sensible, sino que es lógicamente imposible que los haya. Y de hecho, Aristóteles (lo mismo que Santo Tomás más adelante) trata de demostrar la existencia de una Causa Primera sosteniendo que, en otro caso, debería haber una sucesión realmente infinita, lo que, según él, sería lógicamente absurdo

Kant, en cambio, no considera la idea del infinito real como lógicamente imposible. Es, en efecto, lo que él llama una Idea de razón, esto es, una noción internamente congruente, la cual, sin embargo, no es aplicable a la experiencia sensible, toda vez que ni pueden verse ni construirse casos de la misma. La idea de Kant es que podemos construir el número 2 y percibir dos cosas; que podemos construir el número $10^{10^{10^{10}}}$, pese a que seamos incapaces de percibir un número tan enorme de objetos separados, y que, finalmente, no podemos ni percibir ni construir un agregado realmente infinito.

El contraste entre el infinito real, que no puede construirse pero que se “necesita” de todos modos, y el infinito potencial que puede construirse (o existe al construirse), Kant lo subraya con frecuencia. En la apreciación matemática y por consiguiente constructiva de la magnitud, "la comprensión queda tan bien servida y se siente tan satisfecha tanto si la imaginación escoge como unidad una magnitud que podamos captar con una sola mirada, por ejemplo, un pie o una percha, como una milla alemana o inclusive el diámetro de la tierra. . . En cada caso, la apreciación lógica de la magnitud avanza *ad infinitum,* sin nada que la detenga”. Sin embargo, prosigue Kant, "la

es o no una proposición idéntica en el sentido de Leibniz. Y en forma más grave aún, podríamos preguntar si el principio de doble negación, que Leibniz considera como una verdad de razón, es o no una proposición idéntica, porque es el caso que, según veremos en el capítulo IV, la validez lógica de este principio (de que *p* no sólo implica, sino que está implicado en *no-no-p)* es negada por algunos lógicos.

Estos ejemplos, especialmente el segundo, revelan cierta oscuridad no sólo en la noción de la proposición idéntica, sino también en la de reducción de referencia —esto es, la reducción de una proposición no obviamente idéntica a una obviamente tal. Si no existiera duda alguna acerca de la reducción, cabría intentar cuando menos una composición de la disputa, digamos, acerca del principio de doble negación, reduciéndolo a una identidad. Pero resulta difícil, sin embargo, ver cómo, según la exposición de Leibniz, cabría emprender semejante tarea. Se necesita aclaración de las ideas leibnizianas tanto de la proposición idéntica como de la reducción. Hay lugar, en efecto, por una parte, para una investigación acerca de lo que quería decir y, por la otra, acerca de si sus nociones se dejan o no remplazar por otras similares, en cuyos términos pudiera demostrarse la unidad de la lógica y la matemática.

1] EL PROGRAMA

La sustitución fue el procedimiento escogido por Frege, Russell y sus sucesores. Como consecuencia de ello, lo que en Leibniz era poco más que un *credo* se convierte en manos de aquéllos en un programa practicable. Frege, en particular, remplaza la noción leibniziana de una proposición idéntica —aquella en que la inclusión del sujeto en el predicado es obvia o puede hacerse obvia a través de un número finito de pasos— por su propia noción de una proposición *analítica*, una proposición es *analítica* si puede demostrarse que se sigue meramente de leyes generales de la lógica *más* algunas definiciones formuladas de acuerdo con ellas.[1] Y en forma análoga, Frege remplaza

[1] Véase, por ejemplo, *Die Grundlagen der Arithmelik,* Breslau, 1884, § 4; trad. inglesa de J. L. Austin, Oxford, 1950.

CAPÍTULO SEGUNDO

LA MATEMÁTICA COMO LÓGICA: EXPOSICIÓN

Al postular el cálculo como un instrumento prácticamente indispensable para todo razonamiento deductivo, Leibniz enunciaba un principio metodológico que ha sido adoptado por los lógicos modernos de todas las escuelas filosóficas. Son menos, en cambio, los que se han adherido a su otra tesis de que las verdades lógicas y matemáticas se fundan por igual en el principio de contradicción y son susceptibles, por consiguiente, de ser reducidas a "proposiciones idénticas" con un número finito de pasos. De hecho, tal como se presenta, esta última posición podría considerarse como poco más que un *credo,* y aun tal que necesita tanto aclaración, si es que ha de convertirse en un programa práctico, como mucha labor ardua y abnegada si ha de convertirse en una posibilidad realizada.

Se necesita aclaración si hemos de comprender cabalmente ya sea en qué sentido las verdades de razón se fundan en el principio de contradicción, o cuál sea la clase de "reducción" que las revela ser tales. El propio Leibniz parece haber considerado toda verdad de razón como equivalente de una proposición sujeto-predicado de la forma *'$ está incluida en S o Q", en tanto que, por lo que se refiere a la naturaleza de la reducción, parece haber supuesto que ésta consistía en sustituciones directas de los términos de la proposición, *salva veritate,* hasta verse que la inclusión del sujeto en el predicado adoptaba la forma evidente "S está incluida en S o Q".

La idea leibniziana de una proposición idéntica —y podemos añadir también la idea similar de Kant de la proposición analítica— podrá parecer a primera vista algo demasiado restringida, si se pretende que abarque la totalidad de la lógica y de la matemática. En efecto, cabría dudar acerca de si el principio de contradicción mismo

tratamiento por Boole de la lógica de las clases.[4] La extensión consiste, por una parte, en simbolizar no sólo las nociones empleadas en las ramas tradicionales de la matemática, sino también aquellas utilizadas en todo razonamiento deductivo y, por otra parte, en formular explícitamente las reglas de inferencia permisibles. Esto significa que todo paso inferencial puede ser: a] representado por la transformación de una o más expresiones simbólicas en otra, y b] justificada mediante recurso a reglas claramente formuladas.

Es obvio que toda demostración en el sentido de que un determinado teorema de la aritmética es analítico, esto es, que puede deducirse de las proposiciones enumeradas de la lógica, implica un cambio de símbolos en el camino. Obviamente, las expresiones simbólicas que señalen las primeras etapas serán lógicas y sólo contendrán, por consiguiente, símbolos *lógicos* como los que se emplean para las variables preposicionales, los signos de negación o los que indican conjunción. (Al simbolizar el principio de contradicción —de que la conjunción de una proposición *cualquiera y* su negación es falsa, principio manifiestamente lógico— se necesitan todos aquellos símbolos.) Por otra parte, las expresiones simbólicas que señalen las etapas posteriores, así como, ciertamente, la última proposición de la deducción formal, contendrán símbolos que no son obviamente lógicos, y de los que sólo se percibe que lo son como resultado de la deducción. En algún lugar del camino que conduce de las premisas a, digamos, "14-1=2", la transición de símbolos obviamente lógicos a símbolos obviamente no lógicos ha de producirse.

Y aquí se plantea un problema inevitable acerca de la naturaleza y la justificación de la transición. Frege y Russell la consideran como proporcionada por definiciones Pero sus explicaciones de la definición son diferentes, y la diferencia es importante desde el punto de vista de la filosofía de la matemática. Según Russell,[5] en efecto, la definición es un artificio de mera notación. En teoría es

•í Vcasc *The Mathematical Analysis 0/ Logic*, Cambridge, 1847.

5 Véase *Principia Mathemalica, 2ª* cd., Cambridge, 1925, vo!, 1, pp. 11 ss.

la reducción leibniziana a proposiciones idénticas por su propio procedimiento de *demostrar* que una proposición analítica es analítica. Lo hace enumerando lo más claramente posible no sólo todas las leyes lógicas fundamentales permisibles como premisas, sino también todos los métodos de inferencia de empleo legítimo.[2]

La explicación de Frege del carácter analítico de la aritmética presupone que las leyes generales de la lógica, que él enumera y emplea como premisas, son tales como se las reconocería general e inmediatamente.

Estas leyes son proposiciones que él no hace más que enumerar. No las caracteriza por rasgo común alguno, como el que podría suponerse que poseen todas las proposiciones analíticas, pese a que no siempre se perciba inmediatamente que lo poseen. Se ha realizado cierto número de intentos para proporcionar un criterio de "analiticidad", especialmente en términos de las partes constitutivas de las proposiciones analíticas. Un ejemplo de ello lo tenemos en el intento temprano de Russell, rechazado más adelante por él mismo por dar una definición demasiado amplía.[3] Y en forma análoga remplaza Frege la reducción leibniziana a proposiciones idénticas.

Cabe esperar que el camino que conduce de las proposines iniciales enumeradas, por medio de pasos de inferencia, a los teoremas de la aritmética sea largo, especialmente si cada paso ha de estar abierto a una inspección a fondo. Porque si se utiliza siquiera una vez un supuesto que no sea ni una de las proposiciones iniciales ni una consecuencia de alguna de ellas, la demostración carece de valor. Por consiguiente, con objeto de prevenir la intrusión subrepticia de supuestos no lógicos, Frege y sus sucesores adoptaron y extendieron la representación simbólica del razonamiento utilizado por los matemáticos. En esta tarea se vieron ayudados por intentos anteriores de matematizar el razonamiento lógico, especialmente por el

- Véase, por ejemplo, el prefacio a *Grundgesetze der Arithmetik;* trad. inglesa de P. Geach y M, Black, Oxford, 1952, pp. 137 55.

[3] Véase *Principies of Mathematics,* Londres, 1903, cap. i, § 1, y, por lo que se refiere a la retractación, la introducción a la 2[9] ed., Londres, 1937.

lógica carece de objeto propio. Hay que demostrar: a] que las frases que parecen representar entidades (los tal y tal, la clase de todas las cosas que. . .) están entretejidas, siempre que ocurren en la deducción de la aritmética a partir de la lógica, en contextos que no implican el supuesto de que tales objetos mentales existan, y bj que estos contextos han de definirse.

En su teoría de las descripciones, Russell expone un método mediante el cual la frase "el tal y taL. .", que parece referirse a una entidad, puede absorberse en un contexto que no necesita referirse a cosa alguna. El método es perfectamente claro, técnica y esquemáticamente, en su propio ejemplo. Veamos, por ejemplo, la proposición "el autor de *Waverley* era escocés". Esta proposición sólo es cierta si la conjunción de las tres proposiciones siguientes lo es, a saber: "Cuando menos una persona escribió *Waverley:,* A lo sumo una persona escribió *Waverley;* Quienquiera que escribió H'fiver/ey era escoces". Este método es susceptible de diversos refinamientos y variaciones. Pone de manifiesto que la aplicación aparente de un predicado al autor de *Waverley,* al actual Rey de Francia, al primer número primo, etc., puedo explicarse sin necesidad de suponer que estas definiciones concretas describen entidad real alguna cualquiera.

La manera de tratar Russell la impresión —cierta o errónea— de que al hablar de clases hablamos de entidades es semejante a su teoría de las descripciones. Una vez más, "la clase de los objetos que. . ." que parece nombrar una entidad, es absorbida en contextos cada uno de los cuales es definido como un algo entero y está libre de las implicaciones existenciales que Russell desea evitar. La teoría "sin clases", como se ha designado a la manera de tratar Russell las clases, es menos elegante que la teoría de las descripciones y está presentada en forma menos convincente. Ha sido objeto de modificación por parte de lógicos posteriores, los cuales, sin embargo, siguen estando de acuerdo con Russell en que la matemática es lógica y la lógica no contiene asertos acerca de objetos particulares, sean éstos materiales, mentales o lógicos.

En relación con la función de las definiciones, Prege difiere mucho de Russell. Su concepción merece atención

superfino: una mera comodidad tipográfica. “La definición —dice— es una declaración en el sentido de que un determinado símbolo o una determinada combinación de símbolos de nueva introducción ha de significar lo mismo que otro símbolo u otra combinación de símbolos de significado ya conocido.” Se sostiene, sin embgygo, que, cuando menos en dos casos y por muy superfinas que teóricamente sean, las definiciones trasmiten, con todo, una información sumamente importante. Implican, en efecto, “que el *definieñs* [el elemento que define] es digno de cuidadosa atención” y, además, que “cuando lo que se define es algo ya familiar (como ocurre con frecuencia), como, por ejemplo, un número cardinal u ordinal, la definición contiene un análisis de una idea común y puede acaso expresar, por consiguiente, un adelanto notable”.

Así, pues, siendo meras comodidades tipográficas (de abreviación), las definiciones no crean nuevos objetos ni, por lo regular, sugieren su existencia. Algunas veces, sin embargo, una palabra que contribuye al significado de ciertos contextos, pero carece de sentido fuera de ellos, parece, con todo, referirse a uu objeto, como, por ejemplo, la palabra “nadie” en la frase "nadie corre tan velozmente como yo”. Pero que esto no es así lo pone de manifiesto la equivalencia entre las dos frases “nadie corre tan velozmente como yo” y “soy el corredor más veloz”, y el hecho de que el término “nadie” ocurra en una de las dos frases equivalentes y en la otra no. En efecto, no existe entidad alguna a la que se refiera el término “nadie”, tal como “Sócrates”, por ejemplo, se refiere a una persona. La cuestión está en que la definición de “nadie” es contextual, esto es, el término está definido por ciertos usos o en relación con determinados contextos.

Al hablar de números individuales (como cuando decimos, por ejemplo, el primer número primo, el único número que. . .), o al hablar de clases de números (la clase de los enteros divisibles por dos), parecemos estar hablando de algo inmaterial, lógico o mental. Sin embargo, si la aritmética es deducible de la lógica, entonces las proposiciones aritméticas deducidas difícilmente pueden ser enunciados a propósito de objetos de cualquier clase que sea, y pueden serlo menos todavía si, como Russell supone, la

ron comentario. Una función de la forma “Φ (£)” está, por así decirlo, sin saturar: la letra minúscula griega indica un lugar abierto que ha de llenarse con el nombre del objeto. Frege designa “<!>(£;)” como concepto si el resul tado de la operación de llenado proporciona una expre sión que constituye una proposición cierta o falsa. El cam po de valores de un concepto, por su parte, comprende todos los objetos que entran en el mismo, y sólo éstos. En otros términos: el campo de valores de un concepto es su extensión.

Veremos, a partir de los siguientes ejemplos, cómo Frege se sirve del principio en la identificación de objetos lógicos. Pongamos que $ ® sea la función (el concep to) “ξ es una recta paralela a la recta *a*” *y* qi(£) la fun ción (el concepto) “ξ es una recta paralela a la recta *b*”. Si ahora una determinada recta *c* pertenece al campo (la extensión) de ambas (está incluida en ambas) Φ(£) y ψ(ξ), entonces aquélla tiene *algo en común* con Φ( ) Y Ψ(ξ)· Pue de definirse ahora la característica común descubierta (señalada), más bien que postulada. La *direc-. ción* de una recta, digamos *a,* es el campo de valores de la función “ξ es una recta paralela a *a”.*

Nuestro segundo ejemplo es la célebre definición del “número’*, de Frege. En ella desempeña el papel de la noción familiar de rectas paralelas la noción menos fami- liar de los conceptos “similares”. Dos conjuntos de objetos son similares si puede establecerse una correspondencia biunívoca entre sus miembros, y sólo en este caso. *En este sentido,* el conjunto de los dedos de mis dos manos es si milar al de los dedos de mis pies, pero no al conjunto formado por mis ojos. (Importa percatarse de que la pre- sencia o la ausencia de la correspondencia biunívoca puede establecerse, así se supone, sin aplicar conceptos-números.) Cada concepto determina, como hemos visto, un conjunto de cosas, digamos, el conjunto de cosas que incluye: la extensión del concepto. Si los conjuntos de objetos com prendidos en dos conceptos, esto es, en sus extensiones, son similares, diremos que los conceptos son similares ellos mismos; diremos, por ejemplo, que el concepto "dedo de la mano perteneciente a un ser humano normal” es similar a “dedo del pie perteneciente a un ser humano normal”.

no sólo a causa de su interés intrínseco, sino también porque la posición de que la matemática, si bien deducible de la lógica, contiene, con todo, enunciados a propósito de objetos (lógicos) sigue siendo mantenida por algunos lógicos contemporáneos, especialmente por A. Church.[6] La diferencia entre las dos ramas del logicismo, la nominalista de Russell y la realista de Frege, reside ante todo en sus dos concepciones distintas de la definición. Y si bien la diferencia reviste pequeña importancia desde el punto de vista de la manipulación matemática, tiene en cambio gran trascendencia filosófica, según lo subrayan tanto Frege como Russell.

Según el primero de los dos, en efecto, los números son objetos lógicos que corresponde a una filosofía de la matemática señalar claramente. Definirlos no equivale a crearlos, sino a delimitar lo que existe por derecho propio. La definición contextual de los objetos lógicos no basta, porque no pone de manifiesto su carácter de entidades independientes.[7] Postularlos es, según Frege, igualmente improcedente. En efecto, podemos postular la existencia de objetos lógicos independientes tan poco como podemos hacerlo con la de unicornios, los cuales, si existieran, existirían independientemente de su postulación y, si no existen, ninguna postulación, por muy enérgica que sea, logrará darles existencia.

La definición no garantiza —no más en zoología que en lógica— que no se encontrará vacía de contenido la noción definida. Si la razón de la definición está en delimitar objetos, entonces ha de demostrarse, según Frege, que estos objetos existen. Y esto se hace proporcionándonos los medios de identificarlos. El principio que rige la identificación y el reconocimiento de objetos lógicos lo formula Frege como sigue: “Me sirvo de la expresión ‘la función $ (£) tiene el mismo *campo de valores* que la función Ψ(£)’ como equivalente de la expresión ‘las funciones Φ (q) Y Ψ(ξ) tienen el mismo valor para el mismo argumento’ ”.[8] Algunos de los términos de este enunciado requie-

6 Véase cap. r de su *Introduclion lo Mathematical Logic,* vol. i , Princeton, 1956.

7 Véase los §§ 55 y 56 de *Grundlagen der Arithmetik.*

8 *Grundgesetze,* vol. 1, § 3.

eos.. .", así como demostrar esto con "... toda la seguridad y la precisión de que las demostraciones matemáticas son capaces".[9]

Hay que emprender ahora algún intento para indicar de qué manera el programa en cuestión ha sido realizado. Al intentarlo, me esforzaré por no detenerme en aspectos técnicos más tiempo del que es necesario para la aclaración de problemas filosóficos y, especialmente, de aquellas cuestiones de la naturaleza y función de la matemática que son las que aquí nos interesan. Se revelará como importante, por doquier, distinguir la competencia matemática y el juicio filosófico, así como evitar que la admiración por la primera oscurezca los posibles defectos del segundo.

Las ramas de la lógica —en el sentido amplio del término que requiere el logicismo— que han de considerarse son brevemente las siguientes: la lógica de las funciones de verdad, la lógica extensional de las clases y la lógica de la cuantificación. La separación de estas ramas, si bien es conveniente y está históricamente justificada, no es, con todo, necesaria. De todas las exposiciones y demostraciones contemporáneas del programa general del logicismo y en el ámbito de éste, las más elegantes son probablemente las que debemos a W. V. Quíne.[10]

2] LA LÓGICA DE LAS FUNCIONES

Una proposición compuesta cierta o falsa, cuyos componentes sean asimismo ciertos o falsos, es una proposición funcional de verdad (en abreviación, una función de verdad) únicamente si la verdad o el error de la proposición compuesta dependen sólo (son solamente una función) de la verdad o el error de los componentes. Las funciones de verdad son funciones en el sentido estricto del vocablo, y no simplemente en sentido metafórico. Para apreciarlo con toda claridad, consideraremos a título de ejemplo la función familiar $x + y$ o bien, escrita en otra forma, *suma* (x,y), en donde por suposición podemos tomar como va-

° *Principies of Malhemaiics,* prefacio.

io Véase en particular *Malhemalical Logic,* edición revisada, Cambridge, Mass., 1955.

Pongamos ahora que $ (£) es la función (el concepto) "ξ es un concepto similar al concepto *a", y* tp( ) la función (el concepto) "ξ es un concepto similar al concepto *b'* Si ahora cierto concepto *c,* por ejemplo, está comprendido tanto en $ (Í-) como en tp(£), entonces tiene algo en común con ellos, a saber: su número. Habiendo demostrado así su existencia —no postulándola simplemente—, podemos definir el número de un concepto, digamos *a,* como el campo de valores (la extensión) del concepto: "ξ es un concepto similar a *a".* Resulta sumamente instructivo, como lo señala Frege, comparar la manera en que llegamos a esta definición de "número" con aquella en que se llega a la definición de "dirección". Esta comparación mostrará, en particular, que o son "circulares" las dos definiciones o no lo es ninguna. Revelará asimismo que el nombre dado al principio empleado para justificar las definiciones, esto es, al principio de abstracción, ha sido escogido acertadamente.

Veremos en seguida que se necesita para la ejecución de su programa el principio de abstracción de Frege, o algún otro principio similar. Sin embargo, el hecho de adoptarlo entre los principios obviamente lógicos no implica la adopción del punto de vista de que hay objetos específicamente lógicos. En efecto, el método de la definición contextual puede emplearse —y lo ha sido por Russell— para absorber los nombres de entidades, reales o aparentes, que resultan de la aplicación del principio de abstracción a contextos más amplios, en los que dejan de aparecer como nombres de entidades y se convierten en símbolos incompletos, esto es, en símbolos definidos en relación con algunos contextos solamente.

Si bien Frege y Russell difieren en su concepto de las definiciones y, por consiguiente, en su concepción del principio de abstracción y en sus puntos de vista acerca de los objetos abstractos, en todos los demás aspectos su programa es, con todo, el mismo. Se propone, para servirnos de las palabras de Russell, demostrar "que toda la matemática pura trata exclusivamente de conceptos definibles en términos de un número muy reducido de conceptos lógicos fundamentales, y que todas sus proposiciones son reducibles a un número muy pequeño de principios lógi-

Se ha demostrado que todas las funciones de verdad (hablando estrictamente, todas las funciones de verdad binarias, esto es, las funciones de verdad de dos argumentos) pueden introducirse por una definición, si empezamos ya sea: a] con la simple noción de negación alternativa, esto es, la función de verdad "$p|q$", que tiene el valor F para "F|F" y el valor *V* en los otros tres casos, o 6] con la simple noción de negación conjunta, esto es, la función *'P* J '7" 9ue POsee el valor F para F J F y el valor F en todos los demás casos. (Obsérvese aquí que hemos escrito los símbolos de las combinaciones funcionales de verdad — " y "J"— entre las proposiciones combinadas. El orden que adoptemos no importa.)

Por supuesto, las definiciones "E *(p,q)*", "*o (p,q)*" y "O *(p,q)*" pueden extenderse a funciones similares de tres o más argumentos. Así, pues, la función de verdad de *n* argumentos "*Y* $(p_v \ldots, p_n)$" sólo tiene el valor F sí todos los argumentos tienen este valor, y "o$(F_v \ldots, p_n)$" tiene el valor F sólo si uno de los argumentos, y no más de uno, tiene este valor. Un ejemplo obvio de una función de verdad de un solo argumento es "*No (p)*", de la que se dice que tiene el valor F si *p* tiene el valor F, y F sí *p* tiene el valor F. (Con frecuencia se emplea el símbolo — por *NoJ)*

Conviene ver claramente cuáles características son importantes en relación con una proposición compuesta considerada simplemente como función de verdad. Por ejemplo, en la medida en que " (Bruto asesinó a César) y (Roma está en Italia)" es una función de verdad, lo único que importa es el hecho de que los dos argumentos de la función "E *(p q)'** y, por consiguiente, la función misma, tengan el valor F. En cuanto función de verdad, la proposición compuesta está *totalmente* representada por "E(F,F)" o, más explícitamente, por "E (F,F) — *V*". La proposición " (Los leones son mamíferos) y (Los elefantes son mayores que los ratones) ", cuyos argumentos son ambos proposiciones ciertas, tiene exactamente la misma estructura funcional de verdad que nuestro primer ejemplo. Y efectivamente, en la medida en que las dos proposiciones son funciones de verdad, las dos están representadas por una y la misma fórmula "E (F,F) " o, en forma más explícita, por "E (F,F) = F".

lores de los argumentos cualquier número natural, y en donde el valor de la función será a su vez un número tal. Así, por ejemplo: *suma* (2,3) = 5. En la función de verdad, los argumentos son o bien *verdad* (en abreviatura, F) o falsedad (en abreviatura, *F), y* los valores de la función son, a su vez, *V o F.* Así, pues, si *p y q* son variables preposicionales, entonces la conjunción (p *y q)* o *Y(p,q)* poseen el valor *V,* si *y sólo si p y q* tienen ambos el valor *V.* Tenemos: *Y (V,V)* = F, *Y (V,F)* = *F, Y (F,V)* ~ *F,* e T *(F,F)* = *F.* En otros términos, la conjunción de dos proposiciones se define como la función de verdad de dos proposiciones, que tiene el valor *V* si los dos argumentos tienen este valor y el valor *F* en todo otro caso.

Cuando la combinación de dos proposiciones se efectúa por medio del "o" no exclusivo —esto es, el "y/o" de los documentos legales—, se la puede considerar como función de verdad de los dos argumentos y escribirse *o (p,q}.* Esta función la definen: *o (V,V)* — *V, o (VJ*)* — *V, o (F,V)* = F, y o (F,F) = *F,* Vemos, pues, que el valor de esta función es *V* si el valor de uno cuando menos de los argumentos es *V.* La combinación de dos proposiciones por medio del *O* exclusivo *~aut Casar, aut nihil* ("o César o nada"]— se define como la función de verdad: *O* (F,F) = *F, O (V,F)* - *V, O* (F,F) = *V, y O (FJ)* = F. La combinación de dos proposiciones por medio de "⊃" —reproducido a menudo en forma equívoca como "si. . . entonces"— se define por: ⊃ *(F,F)* — *V,* ⊃ (F,F) = F, ⊃ (F,F) = *y y zd (F>F)* — *V,* La tercera fórmula, en particular, no se adapta a muchos empleos del "si. . . entonces". La combinación de dos proposiciones por medio de "≡" —reproducida a menudo como "si y sólo si"— se define por s (F,F) - F, e= (F,F) = F, - (F,F) - F y — (F,F) = F. En lugar de *o* se emplea a menudo el sím* bolo v, y en lugar de *Y* el simbolo &.

Otras funciones de verdad de dos variables preposicionales —lo que da un total de dieciséis— pueden definirse en la misma forma, sí bien no siempre es posible hallar analogías correspondientes en el lenguaje corriente. No existe razón alguna de que no ocurran en éste ni para que no podamos introducirlas en él, si así queremos hacerlo

pío, para una presentación satisfactoria de la mecánica de los cuanta[11] —; que, por razones lógico-filosóficas de peso, la validez general de la ley de tercero excluido, en la que se apoya la dicotomía de las proposiciones en las que tienen el valor de verdad *V* y las que tienen el valor de verdad *F,* es inaceptable. A causa de la importancia que reviste para la lógica y la filosofía del logicismo, vale la pena subrayar que las funciones de verdad son una clase muy especial y abstracta de proposiciones compuestas, esto es, un tipo que en algunos aspectos representa *ciertas* características del inglés y de otros lenguajes naturales (véanse los ejemplos anteriores), pero que en otros aspectos consiste en idealizaciones y simplificaciones (por ejemplo, el supuesto de que hay dos valores de verdad perfectamente definidos). Como tales, se recomiendan para determinados propósitos, en tanto que no se prestan para otros.

Podemos enfrentarnos ahora al problema más importante desde el punto de vísta del logicismo. Esto es, ¿cuáles funciones de verdad son proposiciones lógicamente necesarias y pueden servir, por consiguiente, de premisas permisibles para la deducción de la aritmética a partir de la lógica? La respuesta es clara. La función de verdad, digamos $f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, es lógicamente necesaria si y sólo si es idénticamente cierta, esto es, si es cierta para todos los valores de los argumentos $p_1, \ldots, p_n$. En otros términos, cualquiera que sea la manera como llenemos los lugares de los argumentos con *V* y *F,* la regla de la composición, simbolizada por *f,* es tal que el valor de verdad de la composición es siempre *V.* Consideremos, por ejemplo, el enunciado compuesto "*p* o no-*p*" o bien, para servirnos de otra forma familiar de escribirlo, "*p* v ~ *p*". Aquí, si *p* es cierto, ~ *p* es falso, y si *p* es falso, ~ *p* es cierto. Uno de los dos enunciados componentes ha de ser cierto. El caso en que los dos sean falsos no puede presentarse. Así, pues, uno de sus términos ha de ser cierto. Y toda vez que una alternativa en que uno de los miembros es cierto ha de ser cierta, todo compuesto "*p* v ~ *p*", en

[11] Véase, por ejemplo, H. Reichenbach, *Philosophic Foundations of Quantum Mechanics,* Berkeley, 1948.

Frege explica esta situación, más bien extraña a primera vista, extendiendo de los conceptos a las proposiciones la distinción entre connotación y denotación, o su propia distinción más precisa entre sentido y denotación (*Sinn* y *Bedeulung*). “Animal racional” y “bípedo implume”, para servirnos de una ilustración muy trillada, difieren en cuanto al *sentido,* pero tienen la misma *denotación.* Y en forma análoga, la proposición “Bruto asesinó a César” difiere en cuanto al sentido de "Los leones son mamíferos”, pero las dos tienen, según Frege, la misma denotación: en efecto, las dos denotan *lo verdadero,* el valor de verdad *V.* En términos generales, toda proposición denota ya sea *V* o *F,* siendo *F* denotado, por ejemplo, por "2 + 2 — 5”, "Los leones son peces”, o por cualquiera otra proposición falsa.

El que aceptemos o no este punto de vista —de que todas las proposiciones ciertas denotan (son nombres de) el valor ,de verdad *V, y* todas las proposiciones falsas denotan (son nombres de) el valor de verdad *F—,* no es la cuestión. De lo que se trata es de que, en la medida en que consideramos una proposición como una función de verdad de sus componentes, sólo necesitamos tener en cuenta la verdad o falsedad de éstos, pudiendo ignorar cualquier otra información que ella misma o los componentes trasmitan.

No toda proposición compuesta puede considerarse como una función de verdad. Tomemos, por ejemplo, la proposición compuesta “Creo que no habrá guerra en los próximos veinte años”. La verdad o falsedad de esto no depende del valor de verdad del componente “No habrá guerra en los próximos veinte años”. Por otra parte, tampoco el valor de verdad de “ (‘Todos los hombres son mortales y Sócrates es un hombre’ implica ‘Sócrates es mortal') ” depende de que el antecedente y el consecuente sean ciertos o falsos. Y lo mismo se aplica a todas las afirmaciones y negaciones de deducibílidad.

Y finalmente, no es obvio en modo alguno que toda proposición sea cierta o falsa. Puede sostenerse, en efecto, que el idioma inglés, por ejemplo, contiene proposiciones indeterminadas; que las proposiciones de valor indeterminado de verdad son deseables y útiles —por ejem-

más extensos y poderosos dentro de los cuales podemos deducir los teoremas de la aritmética y de otras ramas de la matemática pura.

Lo que hay que tener presente, en esta etapa del examen, es que, por una parte, *todas* las proposiciones funcionalmente ciertas (todas las tautologías funcionales de verdad) son elegibles como premisas en la derivación emprendida de la matemática a partir de la lógica, y que, por otra parte, podemos mostrar mecánicamente, con un número finito de pasos, si una proposición funcional de verdad determinada es o no una tautología. En el dominio de la lógica de la función de verdad, la diferencia entre proposiciones obviamente y no obviamente analíticas (lógicamente necesarias) ya no reviste importancia. Para éstas, en efecto, el problema leibniziano de *reducir* las segundas a las primeras ha sido resuelto ya. Todas las tautologías de función de verdad son premisas elegibles, y algunas de ellas se necesitan como tales. Pero es el caso que, además de ellas, necesitamos todavía otras premisas más.

3] DE LA LÓGICA DE LAS CLASES

Entre las proposiciones que por acuerdo universal pertenecen a la lógica y, por consiguiente, son premisas permisibles en la deducción de la matemática pura a partir de la lógica, hay varios principios acerca de las relaciones entre clase y clase y entre las clases y los elementos. Su presentación sistemática, en forma de un sistema deductivo, debido principalmente a Boole, precedió a la presentación similar de la lógica de las funciones de verdad y señala una de las fuentes de las que brotó la lógica moderna.

Siguiendo a Lewis y Langford [32], consideraremos brevemente primero la llamada lógica elemental de clases, de la que se verá que en conjunto es conforme a nuestra forma corriente de pensar acerca de las clases, pero ha de extenderse, con todo, si es que ha de proporcionar premisas suficientemente poderosas para llevar a cabo el programa

12 *Symbolic Logic,* Nueva York, 19f2.

donde *p* es *cualquier* enunciado cierto-o-falso, ha de ser cierto.

No todos estos enunciados idénticamente ciertos son tan fáciles de reconocer como éste. Sin embargo, mientras el enunciado compuesto sea una función de verdad que consta de un número finito de componentes ciertos o falsos, resulta posible decidir en forma puramente mecánica, después de un número finito de pasos, si una función de verdad compuesta es o no cierta para todos los valores posibles de sus argumentos. (Los métodos de hacerlo se explican e ilustran en los libros de texto elementales de lógica simbólica.) Por supuesto, la negación de una función de verdad idénticamente cierta es, por el contrario, idénticamente falsa, esto es, falsa para todos los valores de sus componentes.

Fuera de la lógica formal, las funciones de verdad idénticamente ciertas o idénticamente falsas revisten, naturalmente, poco interés. Así, por ejemplo, de poco sirve, por lo regular, decir que habrá o no habrá guerra el año próximo. En la tarea corriente de trasmitir información nos ocupamos precisamente de enunciados que no son ni idénticamente ciertos ni idénticamente falsos, de enunciados, por ejemplo, como el de que habrá guerra el año próximo y no se emplearán en ella armas nucleares. Este enunciado no es ni necesariamente cierto ni necesariamente falso.

Toda vez que la clase de las funciones de verdad que son idénticamente ciertas es bien definida y toda vez que puede decidirse por medios puramente mecánicos si una determinada función de verdad es o no es idénticamente cierta, no hay necesidad alguna de construir un sistema deductivo cuyos postulados y teoremas abarquen todas las funciones de verdad y no abarquen, en cambio, otra proposición alguna. Un sistema deductivo de esta clase sería un sedicente "cálculo proposicional". Se han construido muchos de tales sistemas. Su principal valor es en cierto modo, desde nuestro punto de vista, pedagógico. Son simples ejemplos que ponen de manifiesto el rigor con que, en lógica matemática, se deducen teoremas de postulados y definiciones, siguiendo las reglas de transformación. Constituyen, por otra parte, el núcleo de los sistemas lógicos

tos del conjunto— en un todo”. [13] Para él constituiría un conjunto o clase si reuniéramos, por ejemplo, en “un todo”: a] todos los números irracionales (tomados separadamente), b] el *conjunto* de todos los números irracionales (tomados como elemento único) y —para buena medida— c] Pitágoras.

Uno de los acontecimientos más importantes y fecundos de la historia de la lógica matemática y la filosofía de la matemática fue el descubrimiento de que la lógica de las clases de Cantor, al admitir como clase cualquiera colección, como quiera que se haya formado, conducía a contradicciones. Su presencia impone distinguir, como veremos en seguida, entre las clases admisibles y las clases inadmisibles, esto es, entre las que conducen a contradicciones internas y las que no lo hacen. La región del pensamiento en donde tales distinciones son obligadas se parece en cierto modo un poco a aquel célebre pantano que nadie podía desaguar y por sobre del cual hubo que construir un puente, en consecuencia, por todos los medios artificiales disponibles. El paso de la deducción que conduce de la lógica a la matemática atraviesa esta región. Aquí es donde los seguidores de Leibniz, Frege y Russell, han de pasar de la una a las otras, han de establecer supuestos que no son “obviamente lógicos”, cuando menos en el sentido de lo “lógico” que implica el empleo del término por Leibniz, Frege o Russell.

Veamos ahora el célebre caso de antinomia en la teoría de clases, descubierto independientemente por 'Russell y Zermelo. [14] Sí admitimos como conjuntos todas las colecciones de objetos que satisfacen la definición de Cantor, esto es, todas las colecciones cualesquiera que sean, hemos de admitir *ipso fado* conjuntos que se contienen como elementos a sí mismos. Por ejemplo, el conjunto que consta de todos los conjuntos es un conjunto él mismo y, en cuanto tal, un elemento del conjunto de todos los conjuntos; o bien, el conjunto de todos los conjuntos de más de

13 "Bcitráge zur Begründung der iransfinitcn Mcngenlehre. 1”, en *Malheiñatischc Annalen,* ¡895.

14 Véase Fraenkcl, *Einleitung in die Mengenlehre,* reimpresa por Dover Publications, Nueva York, 1946, o Fracnkel y Bar-Hillel, *Foudations of Set Theory,* Amsterdam, 1958.

Frege-Russell. De entre los numerosos sistemas de lógica elemental de clases hemos escogido uno en que se captan como claras las siguientes nociones: las clases, simbolizadas por *a, b, c, . . .*; el *producto* de dos clases, por ejemplo, aHb, que contiene como miembros todos los elementos comunes a *a* y *b* y ningún otro; la clase universal, simbolizada por V, que consta de todos los elementos disponibles en un universo clasificado dado de discurso, y la clase complementaria, por ejemplo, *a'* de *a,* que contiene todos aquellos elementos de V que no son también elementos de *a.*

En términos de estas nociones, definimos "A" como "V'", esto es, como la clase vacía o clase cero; "o ∪b)" como "(a'nú')", y *"dcb"* como "aHú —a"."(GkJ¿>)" o la suma de *a y b* es la clase que tiene como elementos todo elemento de a, todo elemento de *b y* todo elemento común a ambos, *aczb,* por su parte, expresa que todo elemento de *a* es un elemento de *b,* esto es, que *a* está incluido en *b.*

De este modo, las siguientes seis fórmulas pueden servir de postulados; i] *acxa~ a,* ii] *aC\b ~br\a,* iii] *aC\(br\)~ (tír\b)c\c* *t* iv «ñA = A, v] Si anb' = A,entonces *ac b,* vi] Si *ac.b y aczb',* entonces *a* = *A.* Mediante razonamiento directo, estas fórmulas conducen a los teoremas de la lógica elemental de clases, lo mismo que en el álgebra "común". En forma perfectamente apropiada, los libros de texto de **la** lógica formal sustituyen las reglas del razonamiento informal por reglas de transformación de fórmulas.

Para verificar la correspondencia del formalismo con nuestros razonamientos intuitivos a propósito de las clases, podríamos interpretar *a, b, c>.. .* como otras tantas clases (estrictamente definidas) de animales, por ejemplo, tomando V como la clase de todos los animales, y A como la clase vacía. Las dificultades empiezan cuando consideramos clases artificiales (conjuntos) , cuyos elementos, finitos o infinitos en número, se reúnen sin referencia a similitudes o a los propósitos más familiares de la clasificación. Cantor, fundador de la teoría general de las clases o conjuntos, definió el conjunto *(Menge)* como "la reunión de objetos definidos, perfectamente distinguidos, de nuestra percepción o nuestro pensamiento —los elemen-

aritmética y algo más a partir de un conjunto muy reducido de postulados mediante reglas formalizadas de inferencia; pero, a menos que el conjunto reducido en cuestión conste de postulados ya sea obviamente lógicos o susceptibles de demostrarse como tales, no demuestra la verdad del logicismo.

Russell sostiene que la antinomia que hemos examinado, así como algunas otras que cabe construir en el marco de la teoría de los conjuntos de Cantor, resultan de cierta clase de círculo vicioso. El principio que muestra lo que debe evitarse y cómo puede evitarse se formula en *Principia Mathematica* como sigue[15]: " 'Aquello que contiene *la totalidad* de una colección no ha de formar parte de ella', o inversamente, 'Si, visto que una colección determinada tiene un total, sólo tuviera miembros definibles en términos de este total, la colección en cuestión no tendría total alguno' ". El principio sugiere una jerarquía de tipos y de restricciones relativos a la formación de clases en sus propios términos. Podemos distinguir las clases unas de otras, según el tipo, como sigue: tipo 0, individuos; tipo 1, clases de individuos; tipo 2, clases de clases de individuos, etc. Aparte de estas clases de tioo puro, cabe concebir también clases de tipo mixto.

Si definimos como conjunto normal al que no se contiene como elemento a sí mismo, hay siempre una manera de eludir el molesto "n6u, si y sólo si ~ (nin) " (siendo *n* el conjunto de todos los conjuntos normales). E< efecto, podemos prescribir simplemente que una clase m ha de contenerse nunca a sí misma como miembro. Esta prescripción podría reforzarse prescribiendo que toda clase sólo deba contener como miembros a clases de tipo inferior, o que toda clase sólo deba contener miembros que sean del tipo inmediatamente inferior. Y esta regla, de que si una clase es del tipo n-ésimo sus miembros deben ser todos del tipo (n — l)-ésimo, ha sido efectivamente adoptada por Russell.

Si bien el principio del círculo vicioso elude las antinomias, conduce, con todo, a dificultades que requieren nuevos postulados para su eliminación. En efecto, el prin-

<'»2³ ed., vol. i, p. 37.

diez elementos comprende más de diez elementos y, en estas condiciones, se contiene también a sí mismo. Estos conjuntos nos parecerán acaso un tanto anormales si los comparamos con las clases o los conjuntos normales que no se contienen como elementos a sí mismos; como, por ejemplo, el conjunto de todos los hombres, que contiene a cada hombre individual, pero no se contiene a sí mismo, en cambio, como elemento.

Pongamos que *n* es el conjunto de todos los conjuntos *normales,* esto es, de todos los conjuntos que no se contienen como elementos a sí mismos. Si *m* es un conjunto normal particular cualquiera, por ejemplo, el conjunto de todos los hombres, entonces *m* es un elemento de *n* o, expresado por medio de símbolos: m€n.- Y será asimismo correcto afirmar de cualquier conjunto anormal *a* (por ejemplo, el conjunto de todos los conjuntos) que $\sim(a \in n)$.

Si *m&i* (si *m* es un conjunto normal) , entonces, y sólo entonces, ~ *(m&n)* (m no es un elemento de sí mismo) . Preguntamos ahora si *n* —el conjunto de todos los conjuntos normales— es normal. Si *nGn* (si *n* es un conjunto normal) , entonces, y sólo entonces, ~ *(n£n)* (n no es un elemento de *sí* mismo). Si ~ (nGn), entonces, y sólo entonces, (n€-n) . En otros términos, la afirmación de que *n* es normal implica la afirmación de que *n* no es normal y es implicada por ella. La antinomia puede deducirse en la lógica ordinaria de clases si definimos en ella la clase *n* de todos los conjuntos normales y su clase complementaria n' —*a,* como la clase de todos los conjuntos anormales.

Lo que se necesita para la deducción de la matemática a partir de la lógica es una lógica de clases que pueda proporcionar principios adecuados para este fin, pero sin que sean susceptibles de conducir ellos mismos a antinomias. Se necesita asimismo una justificación de tales principios por motivos mejores que los meramente pragmáticos. En efecto, el programa del logicismo consiste en deducir la matemática a partir de principios lógicos, y no a partir de principios, algunos de los cuales sean lógicos y otros no. A menos de poder demostrar que las premisas son lógicas, nada se ha logrado. Sin duda, es forzoso admirar una técnica deductiva capaz de deducir el todo de la

ciados en los que es afirmada de un número en realidad infinito.

Consideremos, por ejemplo, el enunciado "Sócrates es mortal". Aquí podemos distinguir con Frege (véase *supra,* p. 37): 1] la función no saturada "x es mortal" y 2] "Sócrates" como el nombre de uno de sus valores. Toda vez que la saturación de la función por el nombre de un objeto conduce a una proposición cierta-o-falsa, la función no saturada es designada por Russell como "función proposicional", y por Frege como "concepto". Suponiendo, como tenemos libertad de hacerlo, que el número de hombres es finito y que todos ellos se distinguen inequívocamente por medio de nombres, afirmar que "todos los hombres son mortales" equivale, desde nuestro punto de vista, a afirmar "Sócrates es mortal y Platón es mortal y. . .", en donde los puntos sugieren el complemento de una conjunción muy larga de proposiciones, pero finitas, sin embargo, en cuanto al número y derivadas todas ellas de una misma función proposicional en forma muy sencilla y directa. Esta conjunción es una combinación funcional de verdad de elementos, que tiene el valor *V sólo si* todos los componentes tienen el valor *V.* En otro caso tiene el valor *F.* Podemos abreviar la conjunción muy larga escribiendo: "(x) (x es mortal)" o, en forma más esquemática, "(x)f(x)". (Por motivos de comodidad, suponemos que nuestro universo de discurso consta solamente de hombres.)

Afirmar que existe, por ejemplo, un hombre equivale a afirmar "Sócrates es un hombre o Platón es un hombre o. . .", en donde los puntos sugieren el complemento de una alternancia muy larga derivada de una misma función proposicional en forma obvia. Esta alternancia es a su vez una función de verdad que tiene el valor *F sólo si* todos los componentes tienen el valor *F.* Podemos escribirla en la forma "(Hx) (x es un hombre)" o, en forma más esquemática, como "(Hx) ϕ(x)". En otros términos, nuestras proposiciones universales y existenciales pueden incorporarse perfectamente a la lógica de las funciones de verdad, a condición de que la extensión de nuestras funciones proposicionales sea finita.

Es el caso, empero, que algunas de las funciones propo-

cipio del círculo vicioso estratifica las clases en tipos, y la estratificación se extiende a todas las funciones proposicionales, siendo la función proposición al 0 (x) la clase de todos los objetos de los que 0 (x) puede afirmarse con verdad; así, pues, se extiende a todas las proposiciones, puesto que enunciar una proposición equivale a aplicar una función preposicional o, para servirnos de la expresión de Frege, un concepto a un objeto. (En sentido estricto hubiéramos debido examinar también, por supuesto, la función: $\varphi(x_r\ x_2, \ldots, x_n)$, en la que $n > 1$.)

Russell se da perfecta cuenta de ello. "Importa —dice en *Principia Mathematica* — [observar] que toda vez que hay varios tipos de proposiciones y funciones . . . todas las frases que se refieren a 'todas las proposiciones' o a 'todas las funciones' o a 'alguna proposición (indeterminada)' carecen a primera vista de sentido. . ." Insiste en este punto. "Si la matemática ha de ser posible —dice— es absolutamente necesario. . . que encontremos algún método de formular enunciados que sean por lo regular equivalentes a lo que pensamos cuando hablamos (inadvertidamente) de 'todas las propiedades de x'." No necesitamos examinar aquí el método propuesto por Russell ni los demás postulados que lo encarnan. Como tampoco necesitamos decir nada acerca de los diversos esfuerzos de los sucesores de Russcll por reducir los epiciclos, por así decir, de los que Russell encontró que habían de estar impuestos al principio del círculo vicioso, epiciclo él mismo de la teoría de los conjuntos de Cantor.

4] DE LA LÓGICA DE LA CUANTIFICACIÓN

El último grupo de postulados necesitado para llevar a cabo el programa Frege-Russell se refiere al empleo de los términos "todos" y "algunos" en matemática. Éstos fueron la última parte que se formalizó del aparato. Su necesidad salta a la vista si consideramos la transición de enunciados en los que una propiedad se afirma de un solo objeto individual a otros en que la misma propiedad se afirma de un número finito de objetos y, de ahí, a enun-

16 Vol. i, P- I66>

muestra cuán fuerte ha de ser nuestra “lógica” para que pueda la matemática deducirse de ella.

Los postulados que proporcionan las extensiones infinitas abarcadas por los equivalentes logicistas de las frases “para todo entero. . .” o "para todo número real. . .” son susceptibles de diversas interpretaciones. Se los puede considerar, por ejemplo, como artificios meramente técnicos, admisibles mientras se pueda demostrar que no conducen a contradicciones. Éste es esencialmente el punto de vista de Hilbert y su escuela. Se los puede considerar, por otra parte, como inadmisibles, porque dan una idea errónea de la naturaleza de la matemática. Éste es esencialmente el punto de vista de Brouwer y sus discípulos. Y se los puede considerar, finalmente, como supuestos empíricos a propósito del mundo. Así Russell, por ejemplo, considera como hipótesis empírica la afirmación de que hay en el universo una clase infinita de individuos. Decir que hay menos de diez individuos en el mundo equivaldría a enunciar una falsa proposición empírica, en tanto que decir que hay más de nueve equivaldría a enunciar una proposición empírica verdadera. Y decir que hay en el mundo un número infinito de individuos equivaldría, según Russell, a formular un enunciado empírico que puede ser cierto o falso, pero que en los *Principia Mathematica* se supone ser cierto.[18]

5] DE LOS SISTEMAS LOGICISTAS

Todo sistema logicista ha de juzgarse tanto desde el punto de vista matemático como del filosófico. Con relación a la matemática, hemos de preguntar si su simbolismo es tan preciso y sus deducciones son tan rigurosas como puede razonablemente exigirse sobre la base de las técnicas matemáticas existentes, o si el sistema representa, efectivamente, un avance con respecto a éstas. Filosóficamente, hemos de enfrentar y comparar el sistema logicista con la tesis y los programas filosóficos logísticos tales como fueron enunciados por Leibniz, Frege, Russell y otros.

18 Véase también *Introduclion to Mathematical Philosophy,* 2 ed., Londres, 1920, pp. 13155.

sicionales más importantes de la matemática pura, como "*x* es un entero" o "x es un número irracional", son de una extensión que no es finita. Han de considerarse como infinitas, cuando menos en potencia. Los filósofos matemáticos que adoptan el programa de Russell consideran las extensiones tanto de "*x* es un entero" como de "*x* es un número irracional" como efectivamente infinitas, y consideran la segunda de las funciones como mayor, en un sentido claramente definible, que la primera. Por consiguiente, si han de formularse reglas para el empleo de "para todos los *x*" y "hay un *x* tal que. . .", no se las puede considerar como reglas para aquellas combinaciones funcionales de verdad que implican los conexivos "y" y "o" (en símbolos, "&" y "v"). De hecho, sin embargo, las conjunciones funcionales de verdad y las alternancias se han empleado como analogías heurísticas de enunciados universales y existenciales.

Así, pues, en un universo de discurso compuesto de dos objetos, digamos *a* y *b,* una proposición como "/(a) y f (6) " puede escribirse " (x) f (x) ", Ahora bien, toda vez que " (f (a) &*f* (ó))z>f (a) " es una tautología funcional de verdad (véase p. 43), la fórmula " ((x) *f* (x)) ⊃ *f* (a) " es también, en nuestro universo finito de dos objetos, una tautología funcional de verdad. Y si ahora la extensión de "*f* (x) " es infinita, podemos, con todo, seguir considerando " *((x)f* (x)) ⊃ *f (a)* " como válida, haciéndola un postulado de nuestro sistema lógico o viendo que se haga deductible como teorema. Y en forma análoga, tenemos para nuestro universo finito de dos objetos una teutología funcional de verdad, "f (íi)zd *(f (a)* v *f (b)*)". Toda vez que *a* y *b* son los objetos únicos, esta fórmula puede escribirse como "f (a) j ((Hx)f (x)) ". Si nuestro universo es infinito y deseamos estar en condiciones de afirmar la fórmula con carácter general, necesitamos incluirla entre nuestros postulados o teoremas. La introducción heurística de los principios de cuantificación, ampliándolos de extensiones finitas a extensiones "infinitas" de funciones preposicionales,[17] es sumamente instructiva, por cuanto

[17] Expuesto en detalle por Hilbert y Bernays, *Grundlagen der Mathematik,* Berlín, 1934 y 1939, vol. 1, pp. 99 sí.

construidos a la luz de los ideales logicistas. Trata de mejorar los *Principia Mathematica* evitando algunas de sus dificultades, especialmente las que se. relacionan con la teoría de los tipos. Toda vez que nuestro interés está en el logícismo cual filosofía de la matemática y toda vez que deseamos convenir en las pretensiones matemáticas de la M. L. o de otros sistemas similares en la mayor medida posible, resulta indicado enunciar lo que el propio Quine postula para su M. L.

Sostiene que las nociones de la aritmética pueden definirse en términos puramente lógicos, y que "las nociones de identidad, relación, número, función, suma, producto, potencia, límite, derivada, etc., son definibles todas ellas en términos de nuestros tres artificios de notación, a saber: pertenencia, negación conjunta y cuantificación con sus variables".[19] La definición puede ser aquí tanto explícita como contextual y no implica la existencia, en cualquier sentido que sea, de objetos comprendidos en los conceptos definidos.

No pretende haber deducido los teoremas de la aritmética de principios puramente lógicos. La M. L., lo mismo que todos los sistemas que se proponen incorporar (sustancialmente) el todo de la matemática clásica, contiene entre sus postulados un principio que limita el libre empleo de frases como las de "Todas las *clases* tales que. . ." o "Hay una *clase* tal que. . .", toda vez que esta libertad conduce a contradicciones. En la M. L., la libertad de cuantificación con respecto a las clases, clases de clases, etc., está restringida por una regla para la estratificación del universo de discurso, que es más simple que la teoría russelliana de los tipos. No se pretende que sea un principio lógico.

Esto es lo que Quine pretende decir a propósito de las diversas maneras de conseguir el objetivo logicista de evitar la contradicción: "La formulación menos artificial y al propio tiempo la más conveniente desde el punto de vista técnico parecería deber ser aquella que se avecina lo más posible a los cánones superliberales del sentido común, pero sin reintroducir las contradicciones. Sin em-

[19] Al. L., p. 126.

Hemos de juzgar el sistema a la luz de la tesis de que la matemática es lógica (en diversos sentidos de este aforismo), juzgando al propio tiempo hasta qué punto esta tesis resulta ilustrada por el sistema o tal vez, por el contrario, oscurecida por él. Si el sistema es deficiente en cuanto a la matemática, su confrontación con tesis y programas filosóficos podrá acaso carecer de objeto. Sin embargo, la mera perfección matemática del sistema no basta, con todo, para legitimar una filosofía logicista de la matemática.

Toda vez que el presente ensayo sólo se interesa por la lógica matemática en la medida en que ésta es importante para la filosofía de la matemática, no trataré de criticar sistema logicista —u otro— alguno desde un punto de vista matemático. Supondré siempre, antes bien, o aceptaré en gracia a la discusión, que el sistema formal examinado es matemáticamente sólido o puede convertirse en tal sin modificaciones sustanciales. Aceptar la matemática de Russell, pongamos por caso, rechazando su tesis filosófica de que la matemática puede deducirse de la lógica o traducirse en ésta equivale a no hacer nada más descarriado que aceptar la matemática de Euclides, por ejemplo, pero poniendo en tela de juicio la tesis filosófica de que el espacio es euclidiano.

Todo sistema logicista extrae su lista de postulados y reglas de inferencia de la lógica de las funciones de verdad, la lógica de las clases y la lógica de la cuantificación. La lista de postulados y la lista de las reglas de inferencia no son independientes. Por ejemplo, una lista de postulados suficientemente grande nos permite ahorrar en materia de reglas de inferencia. Algunas veces puede adoptarse un número de postulados infinito, por ejemplo estipulando que todas las tautologías funcionales de verdad o todas las fórmulas que satisfacen determinadas descripciones esquemáticas deban ser postulados. Esta forma de especificar los postulados es la adoptada en la *Mathematical Logic* de Quine. Por otra parte, la M. L. —como se designa a menudo a este sistema— sólo necesita una regla de inferencia, esto es, el *modas ponens:* Si (<£ ⊃ q>) y <£ son teoremas, luego ip es también un teorema.

La M. L. es uno de los sistemas de mayor influencia

CAPÍTULO TERCERO

LA MATEMÁTICA COMO LÓGICA: CRÍTICA

Entre los problemas a los que una filosofía de la matemática debe enfrentarse figuran, según se señaló al principio de este ensayo, primero, el de la estructura y la función de la matemática pura; segundo, el de la estructura y la función de la matemática aplicada, y tercero, los problemas que versan sobre el concepto del infinito. La respuesta logicista a la primera de estas cuestiones puede ilustrarse, de acuerdo con el capítulo precedente, mediante su explicación de la proposición "1 + 1 = 2", que en grandes líneas es como sigue:

Siguiendo a Frege y Russell, el número 1 se define como una propiedad o, más usualmente, como una clase, esto es, la clase de todas aquellas clases cada una de las cuales contiene un elemento solo. En forma más precisa, una clase *x* sólo contiene un elemento o, en otros términos, x es un miembro de la clase de clases 1, (x g l): si 1] existe una entidad, digamos u, tal que (u €■x), y 2] para dos entidades *v* y *w* cualesquiera, si (*y* € x) y (*w* G x), entonces *v* —*w*. (En efecto, si dos entidades cualesquiera que son elementos de x son idénticas, entonces son una sola entidad y, como tal, están en x.) El número "2" se define en forma análoga. Se explica que la frase "y es un miembro de la clase de clases 2", (*y* G 2), es cierta si: 1] existe una entidad, digamos *u*, tal que (tq €y) y otra entidad, *il>*, tal que (u_2 ey), y 2] para una entidad cualquiera, digamos *v*, si (v Gy) entonces (v — u_x) v (*y* ~ u_2).

En términos de estas definiciones de 1 y 2 podemos expresar ahora "1 + 1 — 2", primero, en términos de la lógica de funciones de verdad; segundo, en términos de la lógica de cuantificación, de la cual necesitamos la noción del cuantificador universal, y tercero, por supuesto, en términos de la lógica de clases, de la que necesitamos las

bargo, cuanto más nos acercamos a este punto ideal de liberalidad, tanto más riesgo corremos de reintroducir una contradicción que la posteridad se encargará de descubrir".[20] (Una versión anterior de la M. L. se encontró ser incongruente.)

Para resumir este capítulo, he tratado de explicar en una forma adecuada a nuestros propósitos las consideraciones críticas que habrán de seguir, acerca de cómo se ha llevado a cabo el programa Leibniz-Frege-Russell de la filosofía logicista de la matemática. Se traduce en la construcción efectiva de sistemas matemáticos (interpretados) . Cada uno de ellos consta, por una parte, de postulados y reglas de inferencia con cuyo auxilio pueden derivarse: 1] todas las tautologías funcionales de verdad, 2] los teoremas inobjetables de la teoría de clases o conjuntos, y 3] la teoría de cuantificación; así como, por otra parte, de postulados para evitar la contradicción. Hemos concedido, en gracia a la discusión filosófica, la pretensión de que los formalismos poseen (o podría lograrse, mediante modificaciones puramente técnicas, que poseyeran) la fuerza deductiva y la ausencia de contradicción requeridas, y esto último pese a que la opinión matemática competente esté todavía dividida al respecto.

¿Apoyan estos formalismos la tesis filosófica en el sentido de que la matemática pura es parte de la Jógica? ¿Y da la filosofía logicista de la matemática una explicación satisfactoria de la matemática aplicada? Ocuparnos de estas cuestiones constituirá nuestra próxima tarea.

20 M. L., p. 166.

metría a la manera de la geometría analítica cartesiana, incorporando en esta forma la geometría en el sistema logicista. Es obvio que la validez de este procedimiento depende por completo de si podemos aceptar o no la explicación logicista de la aritmética pura y la aplicada.

Por lo que se refiere al tercero de los problemas a los que toda filosofía de la matemática debe enfrentarse, esto es, el concepto del infinito matemático, la explicación logicista de la serie natural de los números implica el supuesto de infinitos reales. Sin embargo, si bien el logicismo, siguiendo a Cantor, se sirve de esta noción más liberalmente desarrollando una matemática de infinitos de diversos tamaños y estructuras internas diversas, su teoría matemática no está respaldada, con todo, por teoría o análisis filosófico alguno.

Estas observaciones preliminares sugieren el siguiente orden como apropiado a un intento de valorar la filosofía logicista de la matemática. Propongo discutir ante todo que, si bien el logicismo pretende reducir la matemática a la lógica, no delimita en modo alguno claramente el campo de la lógica. A continuación, trataré de mostrar que la explicación logicista de la matemática pura y aplicada no hace justicia al hecho de que, en tanto que las proposiciones de la matemática pura, por ejemplo que "1 + 1 = 2", son *a priori* o no empíricas, las de la matemática aplicada, en cambio, por ejemplo "1 manzana y 1 manzana son dos manzanas", son *a posteriori* o empíricas. En resumen, sostendré que la diferencia fundamental entre conceptos y proposiciones no empíricos y empíricos se ignora. A continuación consideraré el empleo logicista de la noción del infinito real, que está implicado en el concepto matemático del número natural, pero no en el concepto empírico. Trataré de mostrar aquí que este empleo plantea preguntas que el logicismo no contesta en forma alguna. Y finalmente, dedicaré alguna atención a la explicación de la geometría pura y la aplicada por los logicistas, tanto por lo que vale en sí misma como porque subraya y refuerza las objeciones formuladas contra su análisis de la aritmética pura y la aplicada.

nociones de la clase-suma a U $ (que es la ¿tase de elementos que son miembros de a o de 3) y de la clase-producto a ∩B (la cual, según recordamos, es la clase de todos los elementos comunes a a y /3) • Si, en particular, (a O β ~ A, esto es, si la clase-producto es la clase-cero, entonces a y β no tienen miembro alguno en común.

Para simplificar nuestra definición semiformal, suponemos que *x e y,* que están presentes en ella, no son vacíos y no tienen miembro alguno en común. Definimos: *'I + 1 — 2 " por "(x)(y)(((xGl)&(y G l)) - ((x Uj)e2))''.
O en palabras: en el supuesto de que *x* e *y* no son clases vacías sin ningún miembro en común, para cualesquiera clases *x* e *y* —si *x es* un elemento de 1 e *y* es un elemento de 1— entonces, y sólo entonces, su suma lógica es un elemento de 2. Podríamos decir que, entre otras cosas, esta definición ha reducido la adición de números a la operación teórica de clase de formar la clase-suma de dos clases. Á

Si ponemos aceptar la explicación logicista de la matemática pura como ilustrada por su análisis de "1 + 1 ~ 2", entonces la explicación logicista de la matemática aplicada en cuanto ilustrada por su análisis de "1 manzana y 1 manzana son 2 manzanas" no presenta dificultad ulterior alguna. Tratamos entonces simplemente con dos enunciados de lógica. Si *a* y *b* son dos clases de manzana (no vacías y con ningún elemento en común) , entonces la ¡fórmula anterior se convierte para ellas en *((a* G 1) & *(b* e l)) ss ((« U *b*) € 2). En otros términos, "1 + 1 — 2 " es un enunciado de lógica a propósito de clases de clases en general, en tanto que "1 manzana y 1 manzana son 2 manzanas" es un enunciado de lógica a propósito de clases de clases en particular —no un enunciado empírico acerca de un mundo en el que acontece haber manzanas físicas con ciertas características. En efecto, lo que es lógicamente cierto de clases de clases en general es lógicamente cierto de clases de clases de manzanas, peras, números, etc.

El logicismo no conoce problema separado alguno .de proposiciones geométricas puras y aplicadas ni de sus relaciones mutuas. Aritmética, para servirnos de la expresión de Weierstrass y Félix Klein, la totalidad de la geo-

concepto es *a posteriori* si al aplicarlo a un objeto enunciamos una proposición *a posteriori.*

Los filósofos que dicotomizan todos los conocimientos en la forma indicada, en conocimientos *a priori* y *a posteriori,* parecen considerar todos ellos —con la excepción tal vez de Mili— las proposiciones tanto de la lógica como de la matemática pura como *a priori.* Lo que constituye objeto de controversia entre ellos es la cuestión de saber si dentro de la clase de las proposiciones *a priori* hay que proceder o no a una distinción ulterior entre las de lógica y las de matemática pura. Los campos de la matemática pura y de la teología racional comparten la característica de ser *a priori;* sin embargo, pueden distinguirse perfectamente, y ninguno de ellos es reductible al otro. Y es posible, en forma análoga, que la matemática pura comparta su carácter *a priori* con la lógica, y que sean irreductibles una a otra.

Vimos en el capítulo 1 que el logicismo de Leibniz se basaba en una concepción clara pero demasiado estrecha de las proposiciones lógicas o, según se las ha llamado, de las verdades de razón, así como en una concepción clara de la demostración formal o prueba. Esta última concepción ha sido aclarada y perfeccionada ulteriormente por sus sucesores. La concepción de las proposiciones lógicas, por 'él contrario, se ha hecho cada vez más borrosa, con lo que ía tesis entera de que la matemática pura se deja deducir a partir de la lógica ha sufrido de una oscuridad ineluctable.

Para cerciorarnos de esto, supongamos que existe una característica de las proposiciones, digamos *L,* que algunas poseen y otras no, y que poseen asimismo todas aquellas proposiciones deducibles de premisas que la tienen. Una característica que cumple este requisito (el de ser "hereditaria") sería, por ejemplo, la verdad, y una que no lo cumple sería, por ejemplo, la banalidad. No necesitamos suponer que toda proposición esté caracterizada claramente por la posesión o la falta de *L,.* Puede haber casos situados en los límites de ambas posibilidades.

Ahora bien, en su forma original, el logicismo supuso que había una característica hereditaria *L* de las proposiciones lógicas, esto es, su carácter lógico, y se propuso

1] LA EXPLICACIÓN LOGICISTA DE LA LÓGICA

La lógica, a la que el logicismo sostiene que puede reducirse la matemática pura, presupone la dicotomía fundamental de todos los conocimientos en empíricos y no empíricos o, como se ha introducido la costumbre de expresarlo desde los tiempos de Kant, en *a posteriori* y *a priori.* Esta dicotomía es aceptada por filósofos pertenecientes a una antigua y amplia corriente de tradición, incluidos Platón, Aristóteles, Leibniz, Hume, Kant, Frege y Russell, pero es rechazada por Hegel, por idealistas absolutos modernos, como Bradley y Bosanquet, así como por pragmatistas de diversas tendencias.

La dicotomía se explica en formas diversas, pero todas de intención similar a la que seguimos aquí y que basta para nuestro propósito presente. Supondremos aquí que el lector comprende lo que entendemos por un enunciado que describe una percepción o experiencia sensible posible y un enunciado que implica o tiene como consecuencia lógica a otro. Podemos decir, pues (en forma casi kantiana), que un enunciado es *a posteriori* si y sólo si: 1] describe una experiencia sensible posible, o 2] es internamente congruente e implica un enunciado que describe una experiencia sensible posible. Así, por ejemplo, "el papel en que este libro está impreso es blanco'' es *a posteriori,* porque describe una percepción sensible. Y "todos los libros están impresos en papel blanco" —ya sea cierto o falso— es un enunciado *a posteriori,* porque implica, por ejemplo, que el papel de este libro es blanco.

La proposición que no es *a posteriori* es *a priori.* Son ejemplos de proposiciones *a priori: pV'- p,* o cualquier otra tautología funcional de verdad; 1 + 1 — 2, o cualquier otra proposición de matemática pura, y tal vez "el hombre tiene un alma inmortal" y algunos otros asertos semejantes de la teología. (De la cuestión acerca de si semejantes conceptos teológicos carecen o no de sentido no necesitamos ocuparnos, toda vez que el hecho de haber de tratarla no haría más, a lo sumo, que privarnos de unos pocos ejemplos adecuados.) Corresponde a la distinción entre proposiciones *a posteriori* y *a priori* una distinción similar entre conceptos *a posteriori* y *a priori.* Un

Sin embargo, la oscuridad de la explicación logicista de la lógica sólo en parte se debe a que no puede demostrar que las premisas de cualquier sistema logístico satisfactorio posean una característica general *L.* Después de todo, esta incapacidad podría explicarse, o eliminarse, diciendo que *L* es como la calidad de amarillo (o, según otros, como la bondad moral) , en cuanto constituye una característica no susceptible de análisis, y que su posesión por los axiomas de un sistema logicista dado se capta, por fortuna, inmediatamente. Ésta parece, efectivamente, haber sido la posición de Frege antes del descubrimiento de las antinomias de clases teóricas. Desde entonces, todo sistema logicista ha debido incluir cuando menos un postulado cuya aceptación ha de justificarse con fundamento en razones puramente pragmáticas. Rus.sell no sostendría, en favor del principio del círculo vicioso y sus supuestos complementarios, que poseen el carácter directamente obvio e intuitivamente innegable de un principio de lógica, ni lo sostendría tampoco Quine en favor de su versión más elegante. La explicación logicista de la lógica es filosóficamente inadecuada más allá de su mera oscuridad.

Si suponemos que es incapaz de una mejora sustancial, entonces las siguientes alternativas pueden acaso ofrecerse entre otras. Primera, la lógica y la matemática podrán acaso no ser una sola ciencia *a priori,* sino dos ciencias *a priori* separadas. Resulta posible, en otras palabras, caracterizar una amplia clase de proposiciones *a priori,* incluidas las de la lógica tradicional y muchas proposiciones de los *Principia Mathematica,* mediante una característica hereditaria general *L,* y caracterizar una amplia clase de proposiciones *a priori*, incluidas las de la aritmética pura y muchas otras de matemática pura, mediante una característica hereditaria general *M.* Sin embargo, ningún subconjunto de los 'poseedores de *L* contiene las premisas a partir de las cuales se siguen todas las proposiciones de la matemática pura. Éste es de hecho el punto de vista que el logicismo se propuso en su origen refutar. Una de sus variantes fue sostenida por Kant y sigue manifestando todavía su influencia en las filosofías matemáticas tanto del formalismo como del intuicionismo.

En segundo lugar, podría sostenerse que la imposibi-

demostrar: 1] que ciertas proposiciones, digamos l_1, l_2, . . . , l_n, poseen entre otros obviamente *L,* y 2] que a partir de éstas pueden deducirse formalmente todas las proposiciones de matemática pura, entre ellas, digamos, m_1, m_2, . . . , m_n, en un sentido que nos abstenemos de examinar y criticar por el momento. Por consiguiente, las proposiciones de matemática pura también poseen *L.* Como se observará, se formulan aquí dos postulados distintos. El postulado matemático del logicismo consiste en haber deducido las proposiciones *m* a partir de proposiciones *l*, en tanto que la pretensión filosófica es la de haber demostrado claramente que las proposiciones *l*, y por consiguiente las proposiciones *m,* poseen la característica general *L.* La vindicación del postulado filosófico supone que puede vindicarse el postulado matemático. Es el caso, sin embargo, que el postulado matemático de la deducibilidad de las proposiciones *m* a partir de las proposiciones l_1, l_2, . . . , l_n, puede vindicarse sin necesidad de demostrar que l_1, l_2, . . . , l_n poseen una característica general común.

Si examinamos el sistema logicista de Quine, por ejemplo, no encomiamos aserto alguno, y mucho menos demostración alguna, en el sentido de que las premisas del sistema lógico-matemático posean una *característica general L,* la cual, como resultado de deducciones y definiciones, aunque no *prima facie,* se observa estar poseída por la.s proposiciones de la aritmética pura. Las premisas no hacen más que enumerarse. Son miembros de una lista y no poseedoras obvias de la característica general *L.* El sistema de Quine intenta realizar, y podemos suponer que realiza, una tarea matemática, pero no apoya en absoluto la tesis logicista de que la matemática pura se deje reducir a lógica, toda vez que no pretende haber explicado la noción de una proposición de lógica. Se ha sostenido que algunos otros sistemas logicistas son preferibles al de Quine, pero en ninguno de ellos se complementa la lista de postulados con una caracterización general de los mismos como lógicos. La falta de esta caracterización la reconocen la mayoría de los logicistas contemporáneos y sus allegados.[1]

[1] Véase, por ejemplo, Camap, *Introduction to Semantics,* Harvard, 1946, cap. C.

ricas y las proposiciones no empíricas de la lógica y la matemática se considera como una diferencia meramente pragmática, una diferencia en cuanto al grado de tenacidad con que diversos pensadores sostienen las distintas proposiciones, siendo las proposiciones de la lógica y la matemática las que se abandonan con menor facilidad, y las empíricas las que se abandonan más fácilmente. El logicismo original de Frege y Russell se convierte así en un logicismo perfectamente pragmático. En esta forma compuesta, el "logicismo" no expresa más que un piadoso recuerdo histórico.

Demostraré más adelante que las proposiciones y las teorías matemáticas son exactas en un sentido en que las proposiciones y las teorías empíricas no lo son, y que las teorías matemáticas son existenciales en un sentido en que —en muchos aspectos de lo "lógico"— la lógica no lo es. Lo que significa que, en conjunto, habré de sostener el punto de vista de que la matemática y la lógica son dos ciencias *a priori* distintas.

2] LA FUSIÓN LOGICISTA DE LOS CONCEPTOS EMPÍRICOS Y NO EMPÍRICOS

La definición de los números naturales, de Frege-Russell, y del concepto de número natural se considera con razón como uno de los rasgos más impresionantes del logicismo. Hay, de hecho, una diferencia de opinión, según vimos, entre los que aceptan la explicación fregeana de los números como entidades independientes, y los que siguen a Russell en cuanto a considerar las palabras para los números-conceptos como símbolos incompletos, esto es, símbolos sólo contextualmente definidos. Sin embargo, el punto principal de la explicación de Frege y Russell no resulta afectado en esta forma. En efecto, la cuestión estaba en haber afirmado el carácter definible de la noción (su definí bilidad en términos puramente lógicos) y haber ofrecido una definición, siendo indistinto si esto tenía lugar con fundamento en principios metafísicos realistas o nominalistas.

El análisis logicista ha sido atacado por diversos motivos. Se ha objetado, por ejemplo, que el análisis es cir-

lidad de encontrar una característica general *L* obviamente poseída por los axiomas de un sistema logístico y poseída, ya sea obviamente o en forma demostrable, por sus teoremas, revela que la lógica y la matemática pura están enlazadas inclusive más íntimamente que esto. Desde este punto de vista, la lógica y la matemática pura serían a tal punto una sola ciencia que, inclusive, hacer entre ellas una distinción *prima facie,* como lo hacen Frege y Russell, resultaría imposible. En estas condiciones, hablar de una reducción de la matemática a la lógica sería tan absurdo como hablar de una reducción de la lógica a la lógica o de la matemática a la matemática. Si este punto de vista fuere acertado, habría de ser posible encontrar una característica general, digamos *A,* poseída obviamente por los axiomas de un sistema lógico-matemático y, ya sea obviamente o en forma demostrable, por sus teoremas. Es el caso, sin embargo, que la búsqueda de una característica general de esta clase (de *analicidad,* como se la ha llamado a despecho de terminologías más antiguas) , que abarcara tanto la lógica como la matemática, ha resultado, hasta el presente, infructuosa, lo que no es tal vez tan sorprendente en vista de los principios pragmáticos incluidos entre los postulados de los sistemas logicistas, sobre todo principios que casi no se dejan distinguir de las hipótesis empíricas a propósito del universo.

Un tercer punto de vista concebible afirmaría la imposibilidad no sólo de encontrar una característica *L,* sino de encontrar una característica general *A* que distinguiera las proposiciones de la lógica y la matemática, por una parte, de las proposiciones empíricas, por la otra. Según esta manera de ver, la unidad de la lógica y la matemática se basaría en la imposibilidad de toda distinción precisa inclusive entre proposiciones *a priori* y *a posteriori.* Es curioso que esto, verdadera antítesis del logicismo, lo sostenga precisamente, entre todos los filósofos, Quine, cuyo objetivo principal como lógico ha sido el de perfeccionar el sistema de los *Principia Mathematica.* Según este punto de vista, el programa de deducir la matemática pura de la lógica es remplazado por el de demostrar las muchas proposiciones distintas que pueden deducirse de unas pocas» La diferencia lógica aducida entre las proposiciones empí-

la lógica *más* algunas hipótesis no lógicas. Sin embargo, la objeción no va suficientemente lejos.

Consideremos un concepto como "n es un Número Natural" definido de tal modo que *no* implique "n tiene un sucesor inmediato único". En otros términos, admitimos la posibilidad, considerada por Russell, de que la serie de los números tenga un fin. Por otra parte, si existe un último Número Natural, suponemos que es tan grande que nadie —ni hombre de ciencia ni tendero— necesita preocuparse al propósito. El concepto de un Número Natural es aplicable sin duda alguna a grupos de objetos perceptibles. El enunciado, por ejemplo, de que el grupo de manzanas sobre esta mesa tiene el Número Natural 2 constituye una aplicación del concepto "Número Natural", y la verdad del enunciado es independiente de si los Números Naturales forman o no una serie infinita.

Consideremos a continuación el concepto "*n* es un número natural" definido de tal modo que *sí* implica "n tiene un sucesor inmediato único" y, por consiguiente, "n tiene un número infinito de sucesores". *Este* concepto podrá acaso no ser aplicable a grupos de objetos perceptibles. En efecto, la verdad del enunciado de que el grupo de manzanas de esta mesa, por ejemplo, tiene el número natural 2 depende de que los números naturales formen una serie infinita de la que 2 es, por definición, un miembro. Si no "acontecieran formar" semejante serie, el concepto "número natural" sería empíricamente vacío. Los conceptos "Número Natural" y "número natural" difieren, pues, no sólo en contenido lógico, esto es, en sus relaciones lógicas con cuando menos otro concepto, digamos, el de tener un sucesor inmediato único, sino posiblemente también en su alcance o extensión.

Por otra parte, la hipótesis de la serie infinita de los números naturales, mediante la cual el concepto de "número natural" se define y se lo provee de su extensión infinita, no admite falsificación ni confirmación empíricas. Deja margen, en efecto, para otras "hipótesis" similares, una de las cuales "nos asegura" que la clase de los números naturales está totalmente dada, y otra que, además, está también dada la clase de sus subclases. Pero hay también hipótesis que nos aseguran lo contrario. Esta

cular. Toda vez que el tener un cierto número, como la propiedad de una clase, se define en términos de la noción de similaridad entre clases, se plantea la cuestión de cómo establecemos esta similaridad. Por lo visto, en algunos casos cuando menos, necesitamos contar o, lo que es lo mismo, necesitamos aplicar el concepto dé número. Frege previó esta objeción e insistió en que su definición del número de una clase en términos de la similaridad de las clases no es ni más ni menos circular que la definición usual de la dirección de una recta en términos del paralelismo de las rectas.- Sin embargo, Frege y Russell adoptan unos supuestos inadmisibles. En efecto, no están obligados a sostener que la similitud o la falta de similitud entre clases, esto es, la presencia o ausencia de una correspondencia biunívoca entre sus miembros, puede establecerse en cualquier caso. Sin embargo, suponen que esto es así de cualesquiera dos clases, ya sea que sean similares o no, inclusive si no existe manera alguna de aclararlo. El carácter de este supuesto es, cuando menos, oscuro, y requiere justificación. [2]

Otra objeción a la definición russelliana del número, objeción tal vez más general todavía, es que un concepto puramente lógico no puede definirse mediante referencia a una hipótesis no lógica. Según vimos, Russell se expone abiertamente a esta objeción. No sólo *define* todo número natural n como dotado de un sucesor único, $n + 1$, sino que ha de *suponer como hipótesis no lógica* el axioma de la infinitud, el axioma que "nos asegura (acertada o erróneamente) que hay clases que cuentan n miembros, lo que nos permite afirmar que n no es igual a n + 1". Sin este axioma, prosigue, "nos encontraríamos con la posibilidad de que n y $n + 1$ fueran ambos la clase cero". [3] Esta forma de objeción a la definición del número por Russell —que viola el programa logicista— está justificada en toda su extensión. En efecto, el programa consistía en reducir la matemática a la lógica, pero no, en cambio, a

2 Véase también Waismann, *Einführung in das mathematische Denken,* Viena, 1947, pp. 7655.; traducción inglesa, Nueva York, 1951.

[3] *Introduction to Mathematical Philosophy,* p. 132.

encuentran en un tratado clásico sobre una matematización (relativamente) nueva de la estadística en términos de una teoría de medición.[5] Que la aplicación de la matemática a la experiencia supone cierta correspondencia entre conceptos empíricos y aquellas "idealizaciones" de los mismos que son conceptos matemáticos, entre desplazamientos o velocidades, por ejemplo, por una parte, y vectores por la otra, esto constituye casi un lugar común. Lo que yo sostengo es que esto no es así inclusive en el caso de "Número Natural" y "número natural".

Sin embargo, las razones para separar el "Número Natural" de diversos conceptos de "número natural", así como para separar otros conceptos empíricos de conceptos matemáticos "correspondientes", no se han expresado por completo todavía. Al comparar conceptos con respecto a su contenido lógico, hemos aceptado tácitamente dos supuestos, a saber: primero, que resulta siempre claro si un concepto está o no en una determinada relación lógica con otro, y en segundo lugar, que las relaciones lógicas posibles entre conceptos matemáticos no son esencialmente distintas de las que pueden subsistir entre conceptos empíricos. Estos dos supuestos son erróneos uno y otro.

Por lo que se refiere al primero, se aceptaría generalmente que las relaciones lógicas que enlazan conceptos matemáticos, especialmente en sistemas formalizados, están definidas con mucha mayor precisión que las relaciones lógicas entre conceptos empíricos. Una consecuencia de esto es que la cuestión acerca de si dos conceptos matemáticos se relacionan o no lógicamente admite decisión en casos en que la cuestión relativa a los conceptos empíricos correspondientes no la admite. El poner de manifiesto con precisión la noción intuitiva de implicación y de otras relaciones lógicas puede lograrse y se ha logrado en cierto número de maneras diversas. La red lógica entre los conceptos matemáticos depende del sistema lógico y, especialmente, del formalismo lógico en el que acontece estar englobada. Los conceptos empíricos, en cambio, no están anclados así en sistema similar alguno.

Por lo que se refiere al segundo supuesto, habré de

5 H. Cramér, *Mathematical Methods of Statistics,* Princeton, 1946, pp. 145 ss.

libertad para definir conceptos mutuamente contradictorios y para *proveerlos por definición* de amplitudes distintas muestra que ninguno de estos conceptos es empírico. Los Números Naturales, por otra parte, son conceptos empíricos, características de patrones perceptibles, tales como grupos de golpes o de experiencias temporalmente separadas. Ellos y sus relaciones recíprocas están establecidos, no postulados.

Por otra parte, los Números Naturales 1, 2, etc., son inexactos en el sentido dé que admiten casos limítrofes, esto es, patrones a los que pueden atribuirse o de los que pueden rechazarse en forma igualmente correcta. Comparten esta inexactitud con otros conceptos empíricos. En cambio, los números naturales 1, 2, etc., son exactos.

Al aplicar la matemática pura, “interpretamos" no sólo puros números-conceptos en términos de Números Naturales, sino también .relaciones y operaciones matemáticas puras (como la adición) en términos de relaciones y operaciones empíricas. La diferencia entre los conceptos físicos y los empíricos y los conceptos matemáticos correspondientes de contenido y amplitud de referencia lógicos distintos, suele reconocerse por parte de matemáticos aplicados, y en particular de aquellos que andan buscando nuevos modelos matemáticos de experiencia. Por ejemplo, los siguientes son algunos comentarios introductorios que anteceden a un intento de matematizar ciertas partes de la economía en una nueva forma.[4] “En todos estos casos en que semejante operación ‘natural’ recibe un nombre que recuerda una operación matemática —como en los casos mencionados de ‘adición’— necesitamos evitar cuidadosamente las interpretaciones erróneas. Esta nomenclatura no tiene por objeto pretender que las dos operaciones de mismo nombre son idénticas, lo que manifiestamente no es el caso, sino que no hace más que expresar la opinión de que poseen rasgos semejantes, así como la esperanza de que se llegará finalmente a establecer cierta correspondencia entre las mismas". Comentarios similares acerca de la correspondencia entre conceptos y relaciones matemáticos y empíricos, con advertencias similares, se

[4] Véase Neumann y Morgenstem, *Theory of Games and Economic Behaviour,* 2* ed., Princeton, 1947,p. 21.

sobreestimarse, porque es lo cierto que, sin ella, las teorías menos ingenuas poco habrían tenido que analizar, criticar o reconstruir. A continuación voy a esbozar brevemente algunas de las nociones centrales de esta aritmética transfinita, su importancia para la comprensión de las formas y los procesos continuos, y las características de las mismas que parecen requerir una reconstrucción.[6]

Designemos una clase *x* como subclase propia de *y* si cada mienlbro de *x* es miembro de y, en tanto que no todo miembro de y lo es de x. Es obviamente imposible en el caso de una clase finita, por ejemplo ¿1, 2, 3¡-, establecer una correspondencia biunívoca entre ella y cualquier subclase propia suya, por ejemplo ¿1, 2¡% En efecto, cuando menos un miembro de la clase permanecería siempre sin pareja. Esto no ocurre en el caso de clases infinitas. Aquí, en efecto, puede establecerse una correspondencia biunívoca entre la clase y una subclase propia suya. Por ejemplo, la clase infinita de todos los números naturales tiene como una de sus subclases propias la clase de todos los números pares. Aquí puede establecerse una correspondencia biunívoca entre la clase y su subclase propia ateniéndose a la siguiente regla: a] Pónganse los números naturales en su orden de magnitud, 1, 2, 3, . . . , y pónganse los números pares en el orden natural *suyo,* 2, 4, 6, . . . , y b] aparéense el primer número de la primera serie con el primer número de la segunda, el segundo de aquélla con el segundo de ésta, y así sucesivamente. Así, cada miembro de la primera serie tendrá una pareja y una sola en la segunda, y no habrá miembro alguno de una y otra que permanezca sin ella.

En términos de las nociones de "subclase propia" y "similitud", la distinción entre las clases finitas e infinitas puede definirse con precisión. En efecto, la clase infinita es aquella que puede ponerse en una correspondencia biunívoca con una de sus subclases propias. La clase que no es infinita es finita. Obviamente, la definición del

0 Además de los libros de Fraenkel mencionados, el lector encontrará una excelente introducción, no demasiado técnica, en E. V. Huntington, *The Continuum,* 2 ed., Harvard Univcr-sity Press, 1917, Dover Publications, 1955.

demostrar más adelante que las relaciones lógicas en las que es posible que se encuentren conceptos empíricos difieren de modo fundamental de aquellas que pueden subsistir entre conceptos matemáticos. Se mostrará que esta diferencia se relaciona con la falta de exactitud de las primeras y la exactitud de las segundas.

Mi objeto, en esta sección, ha sido mostrar que la explicación logicista de la matemática aplicada implica una fusión ilegítima de números-conceptos matemáticos y de los conceptos empíricos correspondientes. Al ignorar la diferencia entre los conceptos correspondientes, el logicismo nada puede decir y nada dice acerca del carácter de esta correspondencia. Se trata de una tarea que habrá de llevarse a cabo algún día (véase cap. vni) .

3] LA TEORÍA LOGICISTA DE LA INFINITUD MATEMÁTICA

Ha sido claro desde los tiempos griegos que, si nos permitimos pensar en términos de infinitos reales, la totalidad de puntos sin dimensión que se encuentran o constituyen una línea-segmento y la totalidad de momentos sin dimensión que se encuentran en una extensión de tiempo o la constituyen son, *en cierto sentido,* mayores que la totalidad de todos los enteros positivos o de todas las fracciones. En efecto, el intento de comprender configuraciones espaciales continuas y cambios temporales continuos en términos de relaciones numéricas, esto es, el intento de aritmetizar la geometría y la cronometría, parece obligarnos a comparar clases infinitas con respecto a su tamaño numérico y a su estructura ordinal. Se ha conjeturado que el rechazo por los griegos de infinitos reales, tal como lo formuló especialmente Aristóteles, les impidió unificar la aritmética y la geometría a la manera de Descartes, Leibniz y sus sucesores. Esta unificación ha conducido natural y casi inevitablemente a una matemática que distingue entre los tamaños de diversos infinitos reales y entre sus respectivas estructuras, y que calcula con los infinitos números cardinales y ordinales.

La importancia histórica de la matemática transfinbta "ingenua" creada por Cantor e incorporada casi por completó en los *Principia Mathematica* difícilmente puede

una fracción decimal, pero una que no ocurre en la serie de las fracciones, porque difiere de la primera fracción decimal en el primer lugar, de la segunda en el segundo lugar, etc. Así, pues, no hay correspondencia biunívpcá entre la clase de todos los números reales y la clase de todos los enteros. Puede mostrarse que las clases de los números reales en todo intervalo son similares. Todas estas clases similares y otras similares a ellas tienen el mismo número cardinal *c,* que es el número cardinal del continuo.

Así, pues, a y *c* son dos números transfinitos distintos y íT es más pequeño que *c* en el sentido preciso en que, en tanto que puede ponerse en correspondencia biunívoca con una subclase propia de *c,* no puede ser puesto en correspondencia biunívoca, en cambio, con *c* mismo, ¿Hay números cardinales mayores que c? Según Cantor y Russell sí los hay, y aun más que suficientes. La siguiente consideración dará alguna idea de la prueba de Cantor. Veamos la clase {1, 2, 3¡- y formemos la clase de todas sus subclases, incluidas la clase-cero y la clase misma. La nueva clase será, pues: -{A, Oh Oh Oh 0»2h ¿L h ■|2Oh 0»2, 3}-h La clase original tiene 3 miembros, y la clase de sus subclases tiene 2^a. Cantor sostiene que, dada una clase finita o infinita cualquiera de número cardinal *x,* existe la clase de todas sus subclases con el número cardinal 2^X de tal modo que, en tanto que toda clase de número cardinal 2^1 tiene una subclase que es similar a cualquier clase de número cardinal x, lo inverso no es cierto. Para cada *x* existe pues el 2^X mayor, y no hay número cardinal transfinito mayor alguno.

Vimos que los números cardinales transfinitos son en algunos casos iguales uno a otro, y que entre los números cardinales uno puede ser, en un sentido preciso, mayor que otro. Si *a* y *b* son números *finitos,* pueden subsistir entre sí las siguientes tres relaciones, a saber: a = *b,* a > *b*> y *a* < *¿>.* Si *a* y *b* son *transfinitos,* no es inconcebible *prima facie* que no sean comparables entre sí. Con objeto de establecer la misma clase de comparabilidad entre transfinitos que existe entre números cardinales finitos, los teorizantes de conjuntos hubieron de suponer que toda clase podía ponerse en un determinado orden

número de Frege-Russell, o más exactamente del número cardinal, cubre también los cardinales transfinitos. En esta formay el número cardinal transfinito (X se define como la clase de todas las clases similares a la cíase {1, 2, 3, . . <h esto es, la clase de todos los números naturales. La clase con el número cardinal *& se* designa también como "nu - merable". Puede mostrarse fácilmente (véanse los libros de texto importantes) que la clase de todos los números racionales y la clase más amplia de todos los números (complejos) algebraicos (los números que son raíces de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros) son nu merables. Y es igualmente fácil hacer ver que las clases de todos los números racionales, y de todos los números algebraicos, situados entre cualquier par de ellos, son igual ·mente numerables.

El número-concepto en términos del cual se lia des- arrollado el análisis matemático moderno, y especialmente el cálculo diferencial e integral, es el concepto de número real. En conexión con este concepto, la idea del infinito real se ha hecho problemática no sólo para los filósofos de la matemática, sino también para los matemáticos pu ros mismos. La clase de todos los números reales ma- yores que cero e iguales o menores, pongamos por caso, que 1 es no numerable, esto es, no es similar a una clase cualquiera del número cardinal *a.* La prueba de esto ha sido proporcionada por Cantor y es, en líneas generales, como sigue: todo número real del intervalo puede repre sentarse como fracción decimal de la forma $O.aja_2a_3...$, que no termina (los números racionales serán periódicos en esta representación) 5 Supongamos ahora que, de ser posible, todas estas fracciones decimales se escriben como sucesión, esto es, en una correspondencia biunívoca con la sucesión 1, 2, 3, ... Sustituyase ahora el primer nú mero de la primera fracción decimal, el segundo número de la segunda, el tercero de la tercera, etc., por números diferentes, por ejemplo, estipulando que cada uno de estos números sé remplace por 1 si no es 1 él mismo o, en otro caso, por 2. El número así creado es obviamente

~ Se da una breve explicación del concepto clásico de "número real" en el apéndice A.

existencia de la clase de *todos* los números cardinales, entonces este supuesto, que la teoría de Cantor no prohíbe, es incompatible con su teorema de qué no existe número cardinal transfinito mayor alguno. La clase de todos los números cardinales no puede concebirse como completamente dada.

La importancia de esta antinomia, tanto para la teoría de Cantor como para su versión logicista, la describe bien el autor de una obra clásica sobre la teoría de Cantor.[9] "Lo inquietante a propósito de esta antinomia —dice— no es que surja una contradicción, sino que no se esté preparado para ella; en efecto, la clase de todos los números cardinales parece *a priori* tan propicia como la de todos los números naturales. Surge de aquí la inseguridad acerca de si tal vez otras clases infinitas, o posiblemente todas ellas, no serán acaso asimismo seudoclases afectadas de contradicciones. . . y luego la tarea de eliminar esta inseguridad. . ."

Los principios con fundamento en los cuales se evitan, en los formalismos logicistas y especialmente en los *Principia Mathematica,* la antinomia del cardinal mayor, junto con la antinomia de la clase de todas las clases que no se contienen como miembros a sí mismas y otras antinomias, son, por desgracia, principios que ni son obvios ni demostrables lógicamente en sentido alguno aceptado del término. Poseen, y se conviene en general en que lo poseen, el carácter de remedios *ad hoc.* Los que los proponen no pretenden haber diagnosticado el origen de la enfermedad contra la cual los prescriben, sino que expresan meramente la esperanza de que se evitarán en esta forma las contradicciones.

Ahora bien, si un concepto, como el de totalidades infinitas de números cardinales diferentes realmente dadas, sólo puede hacerse inocuo mediante remedios *ad hoc* y aun sólo provisionalmente, cabe adoptar frente a semejante concepto alguna de varias actitudes filosóficas. En efecto, podemos tratar, primero, de remplazar el concepto deficiente por otro que cumpla el mismo objeto. Esto es

[9] F. Hausdorff, *Mengenlehre,* 3ª ed., p. 34; existe también en Dover Publica tions.

normado, pese a que no se conozca método eficaz alguno de lograrlo. El supuesto es que toda clase puede ordenarse adecuadamente, esto es, ponerse en un orden que reúna las siguientes condiciones:[8] 1] Existe una relación R tal que: a] si x e y son elementos distintos de la clase, luego $(x R y)$ o $(y R x)$; b] si $(x R y)$, luego x e y son distintos; c] si $(x R y)$ e $(y R z)$, luego $(x R z)$. 2] Toda subclase de la serie tiene un primer miembro. (Ya que esto no es en modo alguno necesario. Por ejemplo, la serie de los números reales entre 0 y 1, excluyendo 0 y dispuesta en orden de magnitud, no tiene primer miembro alguno.) El postulado de que toda clase puede ordenarse adecuadamente es importante no sólo para la lógica y la aritmética de los números transfinitos, sino también para la matemática "ordinaria", tal como la teoría de la integral de Lebesgue.

El postulado de que toda clase puede ordenarse adecuadamente enlaza la aritmética transfinita de los números cardinales con la aritmética transfinita de los números ordinales, que forman también una jerarquía ilimitada y se definen en términos de la correspondencia biunívoca entre clases en cuanto ordenadas, por diversas relaciones. Algunas de las nociones definidas en esta teoría son de gran importancia en topología y otras ramas de la matemática pura. No tiene mucho objeto añadif a este breve esbozo de la aritmética cardinal transfinita un esbozo de la aritmética ordinal, que habría de ser asimismo sumamente breve. Lo que puede decirse a propósito de la primera se aplica asimismo a la otra.

La matemática transfinita, de la naturaleza y amplitud de cuyo contenido los comentarios precedentes habrán proporcionado acaso una ligera idea, no tardó en revelarse como conducente a contradicciones. Según vimos, en efecto, la teoría permite hacer afirmaciones acerca de *todos* los miembros de clases finitas e infinitas de cualquier número cardinal, por ejemplo, acerca de la clase de *todos* los números naturales, de la clase mayor de todas las subclases de aquella clase, de la clase mayor todavía de todas las subclases de esta última, etc. Pero, si suponemos la

8 Véase Huntington, *op. cit.*

ellas, las entidades geométricas —los puntos, líneas, planos, etc.— se ponen en correspondencia biunívoca (o se identifican) con números o conjuntos de números, y las relaciones geométricas se ponen, en forma análoga, en correspondencia con relaciones entre números. Esta clase de geometría analítica o aritmetizada presupone un concepto numérico altamente desarrollado y, en particular, la noción de los números reales. Y si éstos se conciben a la manera de Cantor y el logicismo, presuponen a su vez la noción de infinitos reales numerables y no numerables. Así, pues, cualquier duda acerca de los infinitos reales afecta la legitimidad de absorber la geometría en los análisis aritmético y matemático.

La otra manera de desarrollar una disciplina geométrica consiste en considerar las entidades geométricas, ya sean reales o ficticias, y las relaciones entre ellas independientemente de toda representación numérica. Las entidades geométricas sólo se definen ahora parcialmente, enunciando sus relaciones con otras entidades geométricas de la misma u otra clase, pero no, en cambio, mediante características tales que permitirían a cualquiera construirlas o imaginarlas. Al enunciarse, por ejemplo, que por cualquier punto que no se encuentre en una *recta* dada sólo puede trazarse una *recta paralela* a aquélla, el sistema geométrico que contiene este enunciado como postulado o teorema no contiene, como parte del mismo, enunciado alguno que nos ayude a identificar *puntos* o *lineas* (paralelas o no) , ya sea exacta o aproximadamente, con signos en un pizarrón o con cualesquiera otros objetos físicos análogos.

Por supuesto, el logicista no encuentra inconveniente alguno en los infinitos reales no numerables o en el concepto de número real que los implica, ni con la aritmetización de toda Ja geometría conocida por medio de este concepto. Por consiguiente, puede afirmar perfectamente que el sistema de los *Principia Mathematica* o cualquier otro sistema similar ha “contribuido” también a la geometría si, según dice Quine, “concebimos las nociones geométricas como identificadas con las algebraicas a través de las correlaciones de la geometría analítica”. [10]

[10] *Op. cit.,* p. 8i.

lo que han intentado Hilbert y su escuela. Estos filósofos matemáticos exigen, según veremos con mayor detalle algo más adelante, que los enunciados de la teoría matemática estén claramente enlazados (aunque no sean necesariamente descriptibles de los mismos) a objetos perceptibles o construibles y a operaciones perceptibles con estos objetos. La razón de ello está en la tesis de que los enunciados que describen percepciones reales o posibles nunca pueden Ser mutuamente contradictorios. Para estos filósofos y matemáticos, la tarea está en remplazar los conceptos "no constructivos" de las teorías ingenua y logicista por otros "constructivos". Esta tarea es particularmente importante para la matemática de los números reales, que en la matemática clásica se definen de modo no constructivo, en términos de clases realmente infinitas (como, por ejemplo, en tanto fracciones decimales infinitas, consideradas como algo "anotado" o disperso en otra forma).

Otra actitud posible es la de echar por la borda ya sea todos los infinitos reales o todos los que no son numerables y pagar el precio de ello no sólo aceptando en algunas partes de la matemática, en el análisis particular, unas mayores complejidad y prolijidad, sino sacrificando también otras partes del problema. Ésta es la actitud adoptada por Brouwer y otros, quienes le siguen, en todo o en parte, en sus esfuerzos por eliminar de la matemática las totalidades infinitas reales.

En conjunto, Frege y Russell se han servido sin sentido crítico, en su análisis y, si se nos permite la expresión, en su logicización de la aritmética, de los infinitos reales cantorianos. Del mismo modo que quienes se sirven sin sentido crítico del concepto de un objeto físico son más bien realistas "ingenuos" que filosóficos, así tampoco los logicistas que se sirven sin sentido crítico del concepto de los infinitos reales pueden pretender poseer una teoría del infinito. Que exista en ella esta brecha constituye un grave cargo contra su filosofía de la matemática.

4] LA EXPLICACIÓN LOGICISTA DE LA GEOMETRIA

Toda disciplina geométrica conocida puede desarrollarse en dos formas fundamentalmente distintas. Según una de

paralelas, de que para toda recta y todo punto que no se encuentre en ella no *se da* más que una, y sólo una, recta paralela a ella a través del punto. Es preciso entenderla como una de cierto número de proposiciones —a propósito de puntos, líneas, etc., geométricos—, las cuales, todas juntas, nos permiten deducir el todo de la geometría euclidiana independientemente de cualquier representación numérica. Hay que subrayar las siguientes características de la proposición geométrica:

Es, ante todo, una proposición *a priori* en el sentido expuesto anteriormente (p. 64). No existen relaciones lógicas de deducibilidad o incompatibilidad entre ella, por una parte, y los enunciados perceptuales, por la otra. Nuestra proposición está desconectada lógicamente de los enunciados perceptuales o, en una palabra, de la percepción. En efecto, si los enunciados perceptuales describen y relacionan puntos físicos y rectas físicas todos los cuales poseen longitud, amplitud y altura, nuestro enunciado es a propósito de objetos que, cualesquiera que sean sus demás características, *no son* tridimensionales, sino que, en el caso de los puntos geométricos, carecen de dimensión, y en el de las líneas geométricas sólo tienen una.

Importa observar en esta conexión que la recta geométrica tiene una extensión infinita. En cuanto distinto de los segmentos perceptuales de recta, el segmento de recta geométrico está comprendido en una recta infinita Aquí, como en el caso de los Números Naturales, que no forman parte de una serie infinita, y de los números naturales, que sí forman parte, la extrapolación de la percepción al infinito es uno de los rasgos que distingue el concepto geométrico del concepto empírico correspondiente.

En segundo lugar, el enunciado admite obviamente alternativas incompatibles o, en una palabra, no es único. Una proposición *p* —como la de nuestro postulado— no e$ única si de su incompatibilidad con alguna otra proposición, digamos *q, no* se sigue que una de las dos proposiciones incompatibles es falsa. Casos de un tipo de proposición que no es única en este sentido son las reglas. (“Fumar inmediatamente después del desayuno” es incompatible con “No fumar inmediatamente antes del almuer-

No es probable que surjan, contra la explicación que de la geometría da el logicista, objeciones de las que no nos hayamos ocupado ya al examinar su explicación de la aritmética pura y la aplicada y la aceptación poco crítica, por su parte, de los infinitos reales. En efecto, objeciones esencialmente nuevas sólo podrían basarse en alguna supuesta imposibilidad de aritmetizar la geometría en absoluto, ya sea por el método del logicismo o por cualquier otro. Mientras no estemos preparados para sostener esto, nuestros argumentos sólo pueden referirse a los medios de la aritmetización, esto es, en este caso, a los conceptos no geométricos clave del logicismo. No obstante, propongo considerar la explicación logicista de la geometría con cierto detalle. Esto nos ayudará a subrayar y reforzar algunos de los argumentos generales ya examinados, en particular los que sostienen que el logicismo combina enunciados y conceptos empíricos con otros no empíricos.

En tanto que la distinción entre números naturales y Números Naturales parecerá acaso a algunos simplemente chocante o antinatural, la distinción entre los triángulos euclidianos, por ejemplo, y los triángulos físicos la acepta prácticamente todo el mundo. Difícilmente identificará alguien un triángulo euclidiano —que consideramos ahora aparte de toda representación numérica— con un triángulo dibujado, o considerará cualquier triángulo dibujado como un caso del concepto de “triángulo euclidiano”. La distinción la hizo muy claramente Platón, según el cual la participación de los triángulos físicos en la Forma del triángulo matemático es totalmente distinta de la identificación. La expresan además una y otra vez los filósofos y los matemáticos, entre ellos el gran geómetra sistemático Félix Klein. Éste dice, por ejemplo: “Es cierto en general, que *los conceptos y axiomas fundamentales* [de la geometría] *no son hechos directos de la percepción, sino idealizaciones apropiadas seleccionadas de estos hechos”* (cursivas de Klein).[11]

A título de ejemplo de un enunciado geométrico de interés particular, veamos el postulado familiar de las

11 *Eletnentary Mathematics from an Advanced Standpoint, Geometry,* traducción inglesa, Dover Publications, p. 186.

La naturaleza de los enunciados “existenciales” en matemática la examinaremos más adelante (cap. vin). Baste aquí señalar, pues, que si un concepto se “define” como aplicándose a objetos que no están dados en la percepción, podría argüirse que tales objetos o han de ei.contrarse en otra parte o deben proporcionarse. Este punto de vista lo sostienen vigorosamente Hilbert y Bernays,[12] quienes afirman muy claramente que en toda teoría axiomática —y aquí nos ocupamos de una teoría tal, independientemente de su posible representación numérica y de su incorporación a algún formalismo logicista— “nos ocupamos de un sistema fijo de cosas (o de cierto número de tales sistemas) que constituye *un dominio de sujetos, delimitado* desde el principio para todos los predicados a partir de los cuales están formados los enunciados de la teoría”. A diferencia de las definiciones ordinarias, los axiomas proporcionan los predicados, cuyo contenido lógico determinan, a (sujetos) particulares. (Reviste cierto interés observar que el carácter existencial del postulado de las paralelas, por ejemplo, lo distingue de las reglas, con las que comparte la característica de estar desconectado lógicamente de la percepción y de no ser único.)

En cuarto lugar, el postulado de las paralelas es una idealización, pues idealiza juicios perceptuales. La noción de idealización necesita mayor explicación de la que suele dársele. Requiere, en particular, la caracterización de aquello que es idealizado, de aquello que idealiza y de la relación entre ambos. Por el momento, bastará decir que el postulado y otros enunciados geométricos son proposiciones *a priori,* las cuales —si bien lógicamente desconectadas de la percepción— pueden utilizarse alternativamente con proposiciones empíricas para *propósitos* particulares. Vale la pena subrayar que nuestra cuarta característica no es puramente lógica. Se refiere, en efecto, a un propósito posible para el que la proposición caracterizada pueda acaso servir. Esto es como debe ser. En efecto, el que un físico, por ejemplo, se sirva de una idealización euclidiana de la percepción o de una idealización no euclidiana, esto depende precisamente del propósito que se tiene en mente.

12 *Op, cit.;* vol. 1, p. 2.

zo", sin embargo, ni una ni otra de las proposiciones es falsa). Por otra parte, las proposiciones *a posteriori y* las proposiciones lógicamente necesarias son únicas. (Véase cap. vin, más adelante).

El que los enunciados geométricos no son únicos ha sido demostrado mediante la construcción de geometrías no euclidianas congruentes. Ni el postulado de las paralelas ni su negación se ven confirmados o refutados por enunciados perceptuales, en particular, acerca del espacio. Lo que las percepciones pueden confirmar o negar —experimentos y observaciones— no es una geometría o un conjunto cualquiera de enunciados *a priori,* sino una teoría física que se sirva de la geometría. Lo que el experimento Michelson-Morley reveló como falso no fue la geometría euclidiana, sino una teoría física que se servía de ella. Lo que el experimento confirma no es una geometría no euclidiana particular, sino, una vez más, una teoría física que se sirve de ella. La tesis de Kant según la cual la geometría euclidiana es *la* geometría del espacio perceptual es exactamente tari errónea como la tesis de que la gometría del espacio perceptual no es euclidiana.

En tercer lugar, el postulado de las paralelas presenta una característica que no comparte con otros enunciados geométricos. Es existencial, en efecto, en el sentido de que hace más que enunciar lo que un concepto implica, afirmándolo (o sosteniendo o suponiendo que no está vacío). No sólo determina los conceptos de un punto o una recta, dejando que la cuestión de su alcance la decida la investigación independiente, sino que determina su extensión directamente. Las dos preguntas, por ejemplo, acerca de sí "ser hombre" implica o no "ser mortal", así como acerca de si existe o no un hombre, son totalmente independientes y distintas. Si al definir el término "ser hombre" se tomara en el sentido de que implica "existe cuando menos un hombre", esto sería refutado, por cuanto hace más que determinar su contenido o su significado lógico, etc. Y esto es precisamente lo que hace el postulado de las paralelas. En efecto, determina la extensión del concepto "paralela a una recta" no sólo indirectamente, enunciando relaciones lógicas entre conceptos distintos, sino de modo directo.

CAPÍTULO CUARTO

LA MATEMÁTICA COMO CIENCIA DE LOS SISTEMAS FORMALES: EXPOSICIÓN

Enfocamos ahora otra línea de pensamiento con otra raíz histórica. Del mismo modo que Leibniz buscó la fuente de la evidencia y el contenido de la matemática en las relaciones lógicas entre proposiciones y conceptos, Kant por su parte la buscó en la percepción. Y del mismo modo que Leibniz concibió los principios orientadores del logicismo, así fue Kant conducido a anticipar los principios guias de dos movimientos modernos en la filosofía de la matemática, esto es, el formalismo y el intuicionismo.

Para Kant, el papel de la lógica en matemática es precisamente el mismo que desempeña en cualquier otro campo del conocimiento. Opina que en matemática, si bien los teoremas se siguen de axiomas *de acuerdo* con los principios de la lógica, los axiomas y los teoremas no son principios de lógica *ellos mismos,* ni son tampoco aplicación alguna de tales principios. Los considera, antes bien, como descriptivos y, concretamente, como descriptivos de la estructura de dos datos perceptuales: el espacio y el tiempo. La estructura de éstos se manifiesta como algo que encontramos en la percepción, al extraer de la misma su contenido empírico variable. Así, por ejemplo, al percibir dos manzanas, la iteración que percibimos es una característica del espacio y el tiempo en los que las manzanas están colocadas. La misma estructura se manifiesta además en nuestras construcciones geométricas deliberadas, tanto en cuanto las hace posibles como en cuanto las confina al interior de límites, permitiendo la construcción, por ejemplo, de objetos tridimensionales, pero no, en cambio, de objetos cuatridímensionales.

Hilbert, que en su programa práctico adoptó la idea

La explicación logicista de la geometría consiste, según hemos visto, en la aritmetización de la geometría, en la que los conceptos geométricos están representados por clases ordenadas de números, sus casos por los elementos de estas clases, y sus relaciones por relaciones numéricas. Es obvio que la aritmetización de la geometría y su incorporación subsiguiente en los formalismos logicistas no afecta en modo alguno la diferencia entre las proposiciones geométricas y aquellas proposiciones empíricas de las que las primeras son idealizaciones. El logicismo en cuanto filosofía de la matemática no explica las diferencias y las relaciones entre ellas. Por otra parte, inclusive si estuviéramos de acuerdo en que la filosofía no debía considerar a la geometría pura aparte de su aritmetización, aun asi todas las objeciones opuestas a la confusión logicista de los números naturales y los Números Naturales podrían volver a formularse en contra de la explicación logicista de la geometría.

que Hilbert debe también, cuando menos fundamentalmente, a Kant.[2] Porque no fue, en efecto, en la filosofía de la matemática donde Kant empleó el principio del que parte la reconciliación de Hilbert, sino en una parte de la filosofía que era para él mucho más importante, esto es, en la reconciliación de la libertad moral y la fe religiosa con la necesidad natural. Argumentando en esta conexión, Kant empezó por señalar que la noción de libertad moral, así como algunas otras nociones, incluida la de infinito real, eran Ideas de Razón sin relación alguna con la percepción, en el sentido de que ni se dejaban extraer de ella ni aplicarse a ella. Sostenía a continuación que todo sistema que contuviera nociones aplicables primordialmente a objetos concretos (tales como la matemática y la física de su época) podía amplificarse efectivamente por medio de Ideas, pero solamente a condición de que pudiera demostrarse que el sistema amplificado era congruente. El demostrar la congruencia de un sistema que abarcaba tanto los hallazgos de la ciencia teórica, por una parte, como las ideas de la moral y la fe, por la otra, era para Kant la forma, en sus propias palabras, de "crear lugar para la fe".

Y en forma perfectamente análoga, Hilbert distingue entre las nociones concretas o reales de la matemática finita y las nociones ideales (Ideas) de la matemática transfinita. Con objeto de justificar el enlace de nociones ideales con las reales, él también requiere una prueba de que el sistema es congruente. La tarea de Hilbert consiste así en probar la congruencia de un sistema que comprende matemática finita y transfinita. Adopta para ello las tesis kantianas de que: 1] la matemática comprende descripciones de objetos y construcciones concretos, y 2] que el enlace de elementos ideales con una teoría requiere una prueba de la congruencia del sistema amplificado en esta forma. En sus manos, estas tesis se han transformado en lo que pretende ser un programa práctico para fundar la matemática en lo que se percibe o es perceptible. Que es lo que nos toca ahora examinar.

[2] Véase, por ejemplo, *op. cit.*, p. 71.

rectora de Kant, expresa la "posición filosófica fundamental" de éste y la suya propia con las siguientes palabras: "...algo que se presupone al proceder a inferencias lógicas y en la ejecución de operaciones lógicas está ya dado en la representación *(Varstellung)*, esto es, ciertos objetos concretos extralógicos, que están intuitivamente presentes en forma de experiencia inmediata y se hallan en la base de todo pensamiento. Si el pensamiento lógico ha de estar seguro, estos objetos han de ser susceptibles de examinarse a fondo, en sus componentes, y la exhibición, la distinción, el orden de sus partes y la disposición de éstas en el espacio, han de estar dados con los objetos mismos, como algo que no puede reducirse a nada más ni necesita por lo demás en modo alguno semejante reducción."[1]

Hilbert comparte esta posición fundamental tanto con Brouwer y su escuela como con Kant. Si la matemática ha de restringirse —por completo y sin calificación— a la descripción de objetos concretos de cierta clase y a las relaciones lógicas entre tales descripciones, entonces ninguna contradicción puede producirse en ella, ya que las descripciones precisas de objetos concretos son siempre mutuamente compatibles. En particular, no habrá en esta clase de matemática antinomia alguna que nos moleste, engendrada por la noción del infinito real, y esto por la más simple de las razones, a saber, porque el concepto de infinito real no describe objeto concreto alguno.

Sin embargo —y aquí está la raíz del desacuerdo entre los formalistas como Hilbert y los intuicionistas como Brouwer—, Hilbert no cree que su posición le obligue a abandonar la matemática transfinita de Cantor. La tarea que se propone es la de adaptar la matemática transfinita a una matemática que se supone, a la manera de Kant, dedicada a objetos concretos. "Nadie será jamás capaz de expulsarnos —dice— del paraíso que Cantor ha creado para nosotros."

Su manera de reconciliar la matemática concreta, finita, con la teoría abstracta transfinita de Cantor es algo

i Hilbert, *Die Grundlagen der Mathematik,* sem. de la Universidad de Hamburgo, vol. 6, p. 65. Véase también Becker, P- 37[1] -

3] en demostrar que una inferencia en el interior del sistema no conducirá más que a descripciones exactas. Toda vez que la matemática abunda en conceptos de infinitos reales que no se dejan identificar con objetos perceptuales, el empleo del método directo se halla restringido a determinadas partes pequeñas de la matemática s

La teoría que implica infinitos reales sólo puede verificarse en cuanto a su congruencia —cuando menos *prima facía*— por el método indirecto. Procedemos estableciendo en éste una correspondencia biunívoca entre: a] los postulados y los teoremas de la teoría inicial, y b] todos o algunos de los postulados y teoremas de la segunda teoría, de la que se supone que es congruente. En algunos casos, la congruencia de esta teoría puede reducirse a otra tercera. Sin embargo, ninguna de estas teorías puede tener un modelo concreto.

Entre las pruebas indirectas de la incongruencia de una teoría geométrica o física, las más corrientes se basan en la aritmetización, esto es, en la representación de los objetos de estas teorías por números reales o sistemas de éstos. Esto nada tiene de sorprendente, ya que, por una parte, la obra original de los matemáticos, cuando menos desde Descartes, se ha caracterizado por la demanda de que toda la matemática había de ser susceptible de dej arse traducir en aritmética y, por otra parte, la obra original de los físicos, cuando menos a partir de Galileo, se ha caracterizado por la demanda de que toda física se dejara matematizar. Se trata en esto de peticiones y convicciones filosóficas, y éstas han conducido a extensiones de la matemática que la hicieran susceptible de adaptarse a todos los formalismos físicos y han conducido asimismo a extensiones tales de la aritmética, que la hicieran susceptible "-mediante el empleo de correspondencias biuníyocas— de adaptarse a toda la matemática y, en particular, á toda geometría y toda álgebra abstracta. En efecto, no puede decirse *a priort* que esta aritmetización de la ciencia no tenga límites. Pero, la reductibílidad a la aritmética de teorías físicas y matemáticas que contienen nociones ideales y que no pueden demostrarse como

3 Véase, por ejemplo, Hilbert-Bernays, *op, cit.,* p. 12.

I] EL PROGRAMA

Demostrar que un sistema de proposiciones —por ejemplo, los teoremas de una teoría matemática— es internamente congruente equivale a demostrar que no contiene dos proposiciones, una de las cuales sea la negación de la otra, ni una proposición de la que se seguiría cualquier otra. (La segunda formulación es cierta asimismo de sistemas en los que la negación no existe.) Solamente en el caso de sistemas muy simples resulta posible compilar una lista de todas sus propiedades y verificarla en relación con la incongruencia. En general, se requerirá una investigación más compleja de la estructura del sistema como conjunto.

Semejante investigación supone que el sistema está perfectamente delimitado y es susceptible de examinarse. La delimitación, como lo vio Frege, se obtiene hasta cierto punto mediante axiomatización, esto es, estableciendo la lista de los conceptos no definidos del sistema, sus supuestos admitidos y, finalmente, las reglas de inferencia (esto es, las reglas para deducir teoremas, a partir de los supuestos y de teoremas ya deducidos) . Mencionamos en el cap. n diversas axiomatizaciones de la lógica de las proposiciones, de las clases y de la cuantíficación. Axiomatizaciones análogas se han dado a menudo para otros sistemas, tales como la geometría (no aritmetizada) y partes de la física teórica. La axiomatización puede ser más o menos estricta, según el grado en que las reglas de la formación de proposiciones y del procedimiento inferencial estén formuladas más o menos explícitamente y con mayor o menor precisión.

Para verificar la congruencia de un sistema disponemos de dos métodos, a saber, el directo y el indirecto. En algunos casos puede demostrarse mediante procedimientos combinatorios que no son deducibles enunciados incongruentes en una teoría determinada. En otros casos, en cambio, el método directo procede exhibiendo un modelo perceptual de la teoría. Y en forma más precisa, consiste: 1] en identificar los objetos de la teoría con objetos concretos, 2] en identificar los postulados con descripciones exactas de dichos objetos y de sus relaciones recíprocas, y

correctas. Pero luego surge la demanda de investigar la estructura del aparato en grado suficiente para reconocer la verdad del aserto. Y aquí tenérnosla nuestra disposición, como auxiliar, aquella' misma manera concreta *(konkret inhaltliche)* de contemplación y actitud finita de pensar que se había aplicado al desarrollo de la teoría misma de los números para la derivación de ecuaciones numéricas. Esta demanda científica puede satisfacerse efectivamente, o sea que resulta posible conseguir en forma puramente intuitiva y finita —lo mismo que en el caso de las verdades de la teoría de los números— aquellas comprensiones que garantizan la seguridad del aparato matemático." [4]

La congruencia de la aritmética clásica, incluidas —podemos decir— las partes principales de la teoría de Cantor, ha de verificarse, y el programa para ello parecería ser: 1] definir con la mayor claridad posible lo que se entiende en matemática por métodos finitos en cuanto opuestos a los no finitos, 2] reconstruir lo más posible de la aritmética clásica en tanto objeto concreto delimitado con precisión, que está dado en la percepción o es realizable en ella, y 3] demostrar que este objeto posee una propiedad que garantiza claramente la congruencia de la aritmética clásica.

El formalista necesita no sólo la seguridad de que su formalismo formaliza una teoría congruente, sino de que formaliza también por completo aquello que se supone debe formalizar. El formalismo es completo si toda fórmula demostrable en el formalismo —de acuerdo con su interpretación perseguida— encarna una proposición verídica y si, inversamente, toda proposición verídica está encarnada en una fórmula demostrable. (Éste es el significado original del término "integridad", que posee también otros significados en la literatura —aunque afines—, algunos de los cuales no tienen relación alguna con una teoría original, no formalizada.) Para algunos de estos formalismos existen métodos mecánicos —procedimientos de decisión— con auxilio de los cuales podemos decidir a propósito de cualquier fórmula si es o no demostrable y si o no, por consiguiente, la proposición que encarna es cierta o falsa.

[4] *Op. cit.,* p. 71; Becker, p. 372.

congruentes por el método directo, suscita la cuestión de la congruencia de la aritmética misma. Antes de Hilbert, no se había sugerido programa práctico alguno para verificar la congruencia de la aritmética. (Por supuesto, si se encontrara que la matemática era reductible a una lógica obviamente congruente, este problema no se plantearía.)

Y la idea básica de Hilbert es aquí tan ingeniosa como simple. El matemático se ocupa de objetos concretos o de sistemas de éstos. Por consiguiente, puede basarse en "métodos finitos"; en otros términos, puede contentarse con el empleo de conceptos susceptibles de adquirir realidad en la percepción, con enunciados en los que estos conceptos están completamente aplicados, y con inferencias de enunciados de esta clase a otros enunciados tales. Los métodos finitos no conducen a incongruencias, especialmente en matemáticas, en donde los objetos concretos se dejan delimitar efectivamente.

Por supuesto, la aritmética clásica se ocupa de objetos abstractos e ideales como los infinitos reales. Sin embargo, aun si por causa de esto han de emplearse *dentro* de la aritmética métodos finitos, puede acaso ser posible, con todo, considerar o reconstruir la aritmética *misma* como un objeto concreto susceptible de tratarse por métodos finitos. Sería natural esperar que este objeto concreto poseyera propiedades capaces de arrojar luz sobre la aritmética clásica tal como se la concibe usualmente. Puede esperarse, en particular, que tenga una propiedad cuya posesión garantizara la congruencia de la aritmética clásica.

Antes de intentar una exposición más detallada de estos aspectos, difícilmente cabe hacer algo mejor que formular el programa para la verificación de la congruencia de la aritmética clásica con las propias palabras de Hilbert: "Consideremos la esencia y el método de la teoría finita ordinaria de los números: ésta puede ciertamente desarrollarse mediante construcción numérica con auxilio de consideraciones concretas, intuitivas *(inhaltlicher, anschau-Ucher).* Sin embargo, la ciencia de la matemática no se agota en modo alguno en las ecuaciones numéricas y no se deja reducir por completo a tales. Con todo, podemos afirmar que constituye un aparato que, en su aplicación a números enteros, produce siempre ecuaciones numéricas

para designar cifras no especificadas. Para las operaciones realizadas con las cifras nos servimos de otros signos, como el paréntesis, el signo "=" (para* indicar que dos cifras tienen la misma estructura) y el signo "<" (para indicar que una de las cifras está contenida obviamente y de modo perceptible en otra). Así 11<111, esto es, si empezando con "1" construimos "11" y "111" por pasos paralelos, el primero quedará terminado antes que el último.

En el seno de esta teoría elemental de los números, podemos efectuar y describir la adición, la sustracción, la multiplicación y la división concretas. Las leyes asociativas, conmutativas y distributivas y el principio de inducción no son más que características obvias de dichas operaciones. Así, por ejemplo, "11 + 111 = 111 + 11" es un caso de *"a + b — b + a",* ecuación que afirma en forma general que la producción de cifras repitiendo los trazos no depende del orden.

Por su parte, el principio de inducción, el más característico de todos los principios de la aritmética, no es, según la expresión de Hilbert y Bernays,[6] un "principio independiente", sino "una consecuencia, que tomamos de la construcción *(Áufbau)* de las cifras". En efecto, si: a] "1" tiene cierta propiedad, y b] si, a condición de que toda expresión-trazo posea la propiedad en cuestión, la posee también la siguiente expresión-trazo (la expresión formada añadiendo un "1" al inicial) , entonces se verá que esta propiedad la poseerá cualquier expresión-trazo que pueda producirse. Una vez definidas las operaciones fundamentales concretas por medio del principio concreto de inducción, podemos definir la noción de número primo y construir para cualquier número primo un número primo mayor. El proceso de la definición recursiva puede también definirse y efectuarse concretamente. Por ejemplo, la función factorial q(n) = 1.2.3 . . . n se define recursivamente por: a] p(l) = 1, y b] p(n + l)-p(n).(n + 1). Esta definición prescribe en forma obvia de qué modo, empezando con p(l) y no sirviéndonos más que de la adición y la multiplicación concretas, podemos construir 0(7?) para cualquier cifra perceptual *n* dada.

[6] ***Op. Cít.***} p. 2J.

Lo ideal sería un formalismo congruente, completo y susceptible de decisión mecánica para toda la matemática.

2] MÉTODOS FINITOS Y TOTALIDADES INFINITAS

La incompatibilidad es una relación entre proposiciones o conceptos. Los objetos y los procesos perceptibles no pueden ser recíprocamente incompatibles. Ni pueden tampoco ser recíprocamente incompatibles las proposiciones si describen con precisión tales objetos y procesos, porque una descripción que implicara incompatibilidad entre entidades que no pueden ser incompatibles no podría ser precisa. Intentos como la teoría de los datos-perceptibles de Russell de señalar objetos generales susceptibles de una descripción precisa —o como los que hacen las teorías como la de las “proposiciones de protocolo", de Neurath, para señalar proposiciones susceptibles de semejante descripción— no son en modo alguno aceptadas universalmente como logradas. En matemática la cosa parece ser distinta. Aquí, en efecto, parece ser relativamente fácil delimitar un campo angosto de objetos y procesos perceptuales susceptibles de descripción precisa o, cuando menos, de una descripción libre de contradicciones. En la teoría elemental de los números nos ocupamos de tales objetos y procesos. Los métodos de tratarlos, esto es, los métodos llamados finitos (o “finitistas") , se exponen en los escritos mencionados de Hilbert y en la obra clásica *Die Grundlagen der Mathematik,* de Hilbert y Bernays.[5] De acuerdo con estos textos, el punto de vista podría exponerse como sigue:

La materia de estudio de la teoría elemental de los números consta de los signos “1", "11", “111", etc., *más* el proceso de producir estos signos empezando con “1" y añadiendo cada vez otro trazo después del último trazo del signo anterior. La cifra inicial "1" y la regla de producción proporcionan juntas los objetos de la teoría; estos objetos pueden abreviarse mediante el empleo de la notación ordinaria, escribiendo, por ejemplo, el numeral "111" como "3". Las minúsculas *a, b, c,* etc., se utilizan

5 Véase también Klccne, *Introduction to Melamathemalics,* Airsterdam, 1952.

incompleto, a complementar por la indicación ya sea de un objeto concreto que posea la propiedad o del proceso constructivo que produzca semejante objeto. En los tér minos de Hermana Weyl," la proposición cxistencial no es más que "un documento que indica la presencia de un tesoro, sin revelar su situación”. Por otra parte, las proposiciones que implican asertos tanto universales como existencíales —por ejemplo, en el sentido de que *existe un* objeto que está en una relación determinada con *cada* objeto— sólo puede tolerarse, una vez más, como *fa$ons de parler* que prometen la exhibición de relaciones suscep tibles de percepción o de construcción.

En cuarto lugar, la ley del tercero excluido no es uni versalmente válida. En efecto, en la matemática finitista no permitimos ni el enunciado de que *todas* las expresio nes-trazo poseen una propiedad *P* ni el enunciado de que, *existe* una expresión-trazo que no posee dicha propiedad, a no ser que estos enunciados estén respaldados por una construcción real. Por consiguiente, no podemos admitir como universalmente válida la disyunción incalificada de estos dos enunciados, esto es, la ley del tercero excluido.

Inclusive en aritmética elemental hay ocasión para em plear en forma restringida métodos transfinitos y, en par ticular, el principio del tercero excluido. Sin embargo, mientras aquí los métodos transfinitos son fácilmente rem-plazables por métodos finitos perfectamente suficientes en relación con su materia de estudio perceptible o construí-ble, la cosa es muy distinta, según lo hemos visto ya en diversas etapas de nuestro examen, en el análisis. Esta diferencia fundamental entre la aritmética elemental y el análisis se debe en su forma clásica —según se ha señalado ya reiteradamente— al hecho de que la noción central de análisis, esto es, la de número real, se define en términos de totalidades realmente infinitas. (Véase apéndice A.)

Vimos que todo número real entre 0 y 1 (podemos prescindir de los números reales externos a este intervalo sin pérdida de generalidad) puede ser representado por una fracción de la forma 0.$a_r$íi$_2$/z$_3$ . . . , en donde los pun-

7 *Phtlosophy of Mathematics and Natural Science,* Prín-ceton, 1949, p. 51.

La aritmética elemental es el paradigma de la teoría matemática. Es un aparato que produce fórmulas y que puede desarrollarse por completo por medio de métodos finitos. Este enunciado, sin embargo, cuyo significado se acaba de ilustrar a partir del desarrollo de la aritmética elemental, sigue siendo innecesariamente impreciso y requiere una caracterización real y explícita de lo que debe entenderse por "métodos finitos".

Primero, todo concepto o toda característica matemática ha de ser tal que su posesión o no posesión por un objeto pueda decidirse mediante inspección ya sea del objeto efectivamente construido o del proceso constructivo que produciría el objeto. La segunda de estas alternativas introduce cierta latitud en cuanto a determinar las características finitas y los métodos finitos de que consta en su empleo. Así, pues, nos conformamos razonablemente con un proceso de construcción que sea realizable "en principio". En efecto, en este momento —esto es, cuando surge la elección entre hacer el programa formalista menos estricto o sacrificarlo— cabe esperar cierta relajación del punto de vista finito.

En segundo lugar, una proposición verdaderamente universal —una proposición acerca de todas las expresiones-trazo, por ejemplo— no es finita: no puede disponerse totalidad alguna de un número ilimitado de objetos para inspección, ni de hecho ni "en principio". Sin embargo, está permitido interpretar todo enunciado de esta clase como enunciado acerca de cada objeto construido. Así, por ejemplo, el hecho de que todos los números divisibles por cuatro sean divisibles por dos significa que, sí construimos un objeto divisible por cuatro, este objeto tendrá la propiedad de ser divisible por dos. Obviamente este aserto no implica que la clase de todos los números divisibles por cuatro exista real y completamente.

En tercer lugar, una proposición verdaderamente existencia! —en el sentido, por ejemplo, de que existe una expresión-trazo con una determinada propiedad— tampoco es finita, porque no podemos recorrer *todas* las expresiones-trazo (de una clase determinada) para encontrar una que posea la propiedad en cuestión. Pero podemos considerar una proposición existencia! como un enunciado

ceros y unos determina un número real, y sólo uno, entre 0 y 1 (en la representación binaria) . Hay así, pues, una correspondencia biunívoca entre la clase de todas las subclases de los números naturales y la clase de todos los números reales entre 0 y 1 y, según puede demostrarse fácilmente, la clase de todos los números reales en un intervalo cualquiera. Al hablar de un número real, el analista clásico está sujeto al supuesto de que es "posible" extraer una subclase de la totalidad *real* de todos los números reales. Y al hablar de todos los números reales está obligado no sólo a suponer la totalidad real de todos los números reales, sino también la totalidad infinita *real* mayor de todas las subclases de esta clase (véase p. 75). El supuesto de tales totalidades al hablar de un número real trasciende el punto de vista finito y el empleo de métodos finitos.

El análisis clínico trasciende el punto de vista finito no sólo en cuanto admite totalidades infinitas reales, sino también en cuanto se sirve de la ley del tercero excluido sin calificación. Si no todos los miembros de una clase poseen una propiedad determinada P, entonces cuando menos un miembro tiene la propiedad *no-P y viceversa,* independientemente de que la clase en cuestión sea finita, infinita enumerable, o mayor que éstas. Otro principio no constructivo del análisis clásico y la teoría de los conjuntos fue puesto de manifiesto por Zermelo. Se trata del llamado principio o axioma de elección *(Auswahlprinzip).* Hilbert y Bernays lo formulan como sigue:[8] "Si para todo objeto *x* de un género $\mathfrak{G}_1$ existe cuando menos un objeto del género $\mathfrak{G}_2$ 9U€ est ¿ cn x en la relación *B(x, y),* entonces existe una función ϕ que correlaciona con cada objeto *x* del género $\mathfrak{G}_1$, un objeto único *<j>(x)* del género $\mathfrak{G}_2$ tal, que este objeto está en *x* en la relación *B(x} <£(*))".*

Otra manera de expresar el axioma de elección consiste en decir que, dada una clase de clases cada una de las cuales posea cuando menos un miembro, existe siempre una función selectora que selecciona un miembro de cada una de dichas clases. (Cabría "representar" la función selectora como un individuo con tantas manos como

8 *Op. cit.*, p, 41.

tos indican que el número de lugares decimales es a, esto es, un infinito enumerable. Si los números a la derecha del punto decimal no terminan, esto es, si a partir de cierto lugar no son todos ceros, y si su orden no muestra periodicidad alguna, entonces la fracción decimal infinita representa un número irracional. Todo lugar de la fracción puede ser ocupado por uno de los números 0 a 9. La totalidad de estas posibilidades, que representa la totalidad de todos los números reales en cualquier intervalo, es mayor, según vimos, que la totalidad de todos los enteros v mayor que la totalidad de todos los números racionales. Su número cardinal *c* es mayor que a, el número cardinal de cualquier conjunto enumerable.

Con objeto de apreciar el carácter de este enunciado a propósito de los números reales, convendrá considerar la representación de los números reales por fracciones binarias de la forma 0-5j$5_2 5_3$. . . . Aquí, del mismo modo que el primer lugar a la derecha del punto decimal indica décimas, el segundo centésimas, el tercero milésimas, etc., así el primer lugar a la derecha del punto binario indica mitades, el segundo cuartos, el tercero octavos, etc. Además, del mismo modo que cada lugar de una fracción decimal puede ser ocupado por cualquier número de 0 a 9 inclusive, así todo lugar de la fracción binaria —todo *b*— es ocupado por 0 o I. Por otra parte, del mismo modo que todos los números reales pueden representarse por todas las fracciones decimales, así también todos los números reales pueden representarse por fracciones binarias, siendo la elección del sistema decimal, binario o cualquier otro, una cuestión puramente externa.

Supongamos ahora que todos los números naturales están dados en su orden natural y en su totalidad de este modo: I, 2, 3, 4, 5, 6, . . . Formemos luego una subclase, finita o infinita, de la totalidad, indicando *la elección* de un número para la subclase escribiendo 1 en su lugar, e indicando el *descarte* de un número escribiendo en su lugar un cero. Si escogemos 2, 4, 5, . . . y descartamos 1, 8, 6, escribiremos, pues, 010110 . . . Es obvio que toda serie infinita de ceros y unos determina una subclase, y sólo una, de la clase de los números naturales en su orden natural. Pero acabamos de ver que toda serie infinita de

definido como el punto en que todas las rectas paralelas a la recta dada se cortan, así como la introducción, en todo plano, de una línea ideal conteniendo todos los puntos al infinito de todas las líneas del plano. Por supuesto, no puede ser cuestión del "punto ideal común a dos rectas paralelas" que denote entidad alguna perceptiblemente dada o construible; en efecto, las razones para pedir puntos de intersección de las rectas paralelas requieren que todo conjunto de éstas tenga *un solo* punto de intersección, y *no dos,* uno, en cierto modo, en cada extremo de las rectas paralelas.[10] Al añadir puntos, líneas y planos ideales a los "reales", creamos conceptos que, si bien se relacionan lógicamente con aquellos a los que se han adjuntado, son todavía menos característicos de percepción que los primeros. Inclusive si del "punto real" y de la "recta real" puede decirse *cum grano satis* que describen objetos perceptivos, ninguna cantidad de sal justificará, en cambio, decir que el "punto ideal" y la "recta ideal" son características perceptivas.

La introducción de elementos ideales en la geometría proyectiva, en la teoría algebraica de los números y en las teorías matemáticas en general, há constituido, según Hilbert, una de las glorias del pensamiento matemático original. Según él, la aparición de antinomias como resultado de esta adjunción de totalidades infinitas a la aritmética elemental no requiere su abandono, sino alguna prueba de que una aritmética ampliada —la combinación en un solo sistema de objetos y métodos finitos y transfiiitos— está libre de contradicción. Sugiere la manera de lograrlo, sostiene, la consideración de la aritmética elemental.

Su punto crítico es aquí que la aritmética elemental puede concebirse de dos modos distintos: por una parte, de modo perfectamente natural, como una *teoría acerca* de la actividad regular de construir expresiones de trazos y, por la otra, en forma algo artificial, como un *formalismo,* esto es, como la actividad reglamentada, ella mis-

10 Acerca de la explicación de las razones para introducir puntos, líneas y planos ideales y para mayores detalles, véase, por ejemplo, Courant y Robbins, *What is Mathemalics?,* Oxford, 1941, y ediciones posteriores, especialmente cap. iv.

clases no vacías, que cogiera un elemento de cada una d
ellas.) Es posible, manifiestamente, concebir una función
de selector para una clase que conste de un número f
nito de clases finitas. Sin embargo, cuando llega el cas
de extraer un miembro de cada una de un número in
finito de clases finitas, y más todavía de un número inf
nito de clases infinitas, la demostración de una función
de selector en tanto característica de objetos o procesos con
cebibles o construibles carece obviamente de objeto. E
hecho de que el axioma de elección está implícitament
supuesto en una gran cantidad de análisis y de teorías d
conjuntos sólo se puso de manifiesto para los matemático
después de que Zermelo hubo descubierto que había const
tuido un supuesto tácito en la prueba de que toda clas
puede ordenarse bien y que, en consecuencia, los números
cardinales de dos clases cualesquiera (finitas o infinitas
son comparables (véase p. 77).[9]

Así, pues, según lo expone Hilbert, la matemátic
clásica tiene como núcleo una materia de estudio per
ceptible, o cuando menos perceptualmente construible,
la que se adjuntan objetos ficticios, imperceptibles y n
construibles perceptualmente y, en particular, diversas to
talidades infinitas. A esta adjunción de materia de estu
dio ''ficticia" corresponden: 1] conceptos ideales que so
característicos de la misma —por ejemplo, los infinito
reales de Cantor y los números cardinales y ordinales trans
finitos—, 2] enunciados ideales que la describen u opera
ciones con ella —por ejemplo, la ley incalificada del te
cero excluido o el axioma de elección—, y 3] inferencia
ideales que conducen ya sea de enunciados de matemátic
finita a enunciados ideales, o bien de enunciados ideale
a otros enunciados ideales.

Esta adjunción de conceptos, enunciados e inferencias
ideales a una teoría no es, por supuesto, totalmente nuev
en matemática. Así, por ejemplo, en la geometría pro
yectiva se ha revelado como muy útil la introducción d
un punto ideal en el infinito de cada recta al que se h

[9] En cuanto al empleo del axioma en topología, en la teo
ría de la medición de Lebcsguc, etc., véase J. B. Rosser, *Logi
for Mothematicians,* Nueva York, 1953, pp. 510.SS.

correspondencia entre la congruencia formal del formalismo y la congruencia lógica de la teoría. Afirmar que la teoría es lógicamente congruente equivale a afirmar que no todo enunciado de la teoría es a la vez un teorema de la teoría. (Esta definición posee la ventaja, como ya se indicó, de evitar el empleo de la noción de negación.) Afirmar que el *formalismo* es formalmente congruente equivale a afirmar que no toda fórmula enunciativa del formalismo es a la vez una fórmula teorémica. En vista de la correspondencia (resultante de su incorporación en los mismos objetos físicos) entre fórmulas enunciativas y fórmulas teorémicas por un lado y enunciados y teoremas por el otro, estamos autorizados a decir que demostrar la congruencia formal equivale a demostrar al propio tiempo la congruencia lógica.

Veamos ahora la aritmética no elemental. La materia de estudio de esta teoría aritmética ya no es, por supuesto, finita. Pero puede acaso resultar posible construir un *formalismo* aritmético, con fórmulas enunciativas y teorémicas que correspondan como antes a enunciados y teoremas de la teoría, y este formalismo podría ser luego la materia de estudio de una metateoría. Toda vez que la materia de estudio, esto es, la construcción de fórmulas, sería finita, la metateoría sería exactamente tan finita como la aritmética elemental, de la que sólo diferiría por ser acerca de otra clase de construcción perceptiva. Si puede construirse un formalismo correspondiente —en la forma requerida — a la teoría de la aritmética no elemental, entonces podemos también establecer *eo ipso,* demostrando congruencia *formal* del formalismo, congruencia *lógica* de la teoría. En efecto, podemos hacerlo por métodos estrictamente *finitos,* toda vez que nuestra materia de estudio —esto es, la actividad reglamentada de la construcción de fórmulas— es perceptiva o, cuando menos, perceptivamente construible en principio. Por consiguiente, nuestra próxima tarea habrá de consistir en considerar las actividades constructoras de fórmulas o formalismos, tanto de los formalismos considerados en sí mismos como de los que son al propio tiempo formal izadones de teorías.

ma, para construir objetos perceptivos: esta vez, por supuesto, no expresiones de trazos, sino fórmulas. La teoría aritmética consta de enunciados, y el formalismo aritmético de manipulaciones de símbolos y sus resultados. Al igual exactamente que la actividad reglamentada de construir expresiones-trazos, el formalismo puede convertirse en materia de otra teoría, llamada usualmente "metateoría". Nos vemos así conducidos a distinguir dos clases de actividades constructivas: construcción de trazos y construcción de fórmulas, y entre dos clases de teorías: la teoría original acerca de la construcción de trazos, y la nueva "metateoría" acerca de la construcción de fórmulas.

Obviamente, la conexión entre la teoría aritmética, el formalismo aritmético y la metateoría a propósito de éste es muy íntima. En grandes líneas se funda en el hecho de que los *mismos* objetos físicos, por ejemplo, «1 + 1 = 2» o «1 + 1 — 3» (los objetos entre comillas francesas), funcionan de modos distintos, aunque correspondientes, en la teoría aritmética y en el formalismo aritmético. El formalismo puede construirse de tal modo que resulte posible distinguir dos clases de reglas en particular, a saber: a] reglas para la producción de fórmulas como las que corresponden (en nuestros dos ejemplos) a enunciados de la teoría, y que designaremos como fórmulas enunciativas, y b] reglas para la producción de fórmulas como las que corresponden (en el primer ejemplo, pero no en el segundo) a enunciados o teoremas verdaderos de la teoría, y que designaremos como fórmulas teorémicas.

Al enunciar que un determinado objeto físico es, en el contexto del formalismo, una fórmula enunciativa o una fórmula teorémica, hablamos *acerca* de una construcción de fórmulas y hacemos un enunciado de metateoría. Este enunciado es *finito,* por cuanto enuncia, de un objeto perceptivo o del proceso que lo produce, una característica puramente perceptiva o (¡literalmente!) formal. La característica *formal* de una fórmula enunciativa que es una fórmula teorémica corresponde a la característica *lógica* de un enunciado que es un teorema.

A esta correspondencia entre las características formales del formalismo y las características lógicas de la teoría pueden añadirse otras. Tal vez la más importante sea la

rácter general, la existencia de la aritmética ampliada de los objetos y las proposiciones ideales, como carentes de sentido o sencillamente como falsos. En tal caso propondría, con H. B. Curry,[11] definir la matemática como "la ciencia de los sistemas formales". En otras palabras, en tanto que para Hilbert la matemática o, mejor dicho, la metamatemática es como el "hilo de Aríadna" leibniziano que le guía a través del laberinto de las proporciones y las teorías matemáticas, el *formalista estricto,* en cambio, considera que la matemática tiene dicho hilo —y nada más— como objeto propio de estudio.

El paso del punto de vista formalista de Hilbert al formalismo estricto de Curry deja intactos los resultados matemáticos del primero. Representa, sin embargo, una transición a un punto de vista filosófico distinto. La matemática no tiene ahora intercambio alguno *con nada, excepto los sistemas formales* y, en particular, no con entidades no perceptuales ideales. La posición de Hilbert es análoga a la del fenomenalista moderado que admitiera conceptos de objeto físico como conceptos auxiliares —aunque ficticios—, en términos de los cuales se ordenarían los datos sensibles o se formularían enunciados puramente fenomenalistas, aun si los conceptos de objetos físicos no se dejaran "reducir" a datos sensibles o a conceptos puramente fenomenalistas. Por otra parte, el formalismo estricto es análogo al fenomenalismo que sólo admitiera datos de la percepción y enunciados puramente fenomenalistas.

En cuanto filosofía de la matemática, el formalismo estricto está más cerca que el punto de vista de Hilbert a la doctrina de Kant en la *Estética trascendental.* Según Kant, en efecto, un enunciado de matemática pura tiene construcciones para su objeto de estudio, construcciones en espacio y tiempo, restringidas por la naturaleza misma de dichas intuiciones. Según el formalismo estricto, en cambio, el objeto de estudio de la matemática es construcciones cuya posibilidad se halla restringida por los límites dentro de los cuales la percepción es posible, y

11 ***Outlincs of a Formalice Phílosophy of Mathematics,*** **Amsicrdam, 1951.**

3] SISTEMAS FORMALES Y FORMALIZACIONES

Una vez construido un sistema formal, se ha llevado al mundo una nueva “entidad", esto es, un sistema de reglas para la producción de fórmulas. Estas fórmulas son objetes perceptivos que pueden distinguirse y clasificarse por medio de características perceptivas que son- poseídas ya ■eapor las fórmulas mismas o por el proceso de su producción y, en particular por la serie de fórmulas que conducen sucesivamente de una fórmula inicial a la fórmula objeto de estudio. En un examen formal hemos de ignorar toda correspondencia entre las propiedades formales del sistema formal y las propiedades lógicas de cualquier teoría preexistente, pese a que el establecimiento de semejante correspondencia fuera el motivo conductor de la construcción del sistema formal.

Según Hilbert, el contenido de la matemática sigue siendo las proposiciones: en el caso de la aritmética elemental son proposiciones acerca de expresiones-trazos y de su producción, y en el caso de la aritmética ampliada (clásica) comprenden, además, proposiciones “acerca” de objetos ideales. Los sistemas formales que aquél construye son simplemente medios con cuyo auxilio estudia, en virtud de la correspondencia entre propiedades formales y lógicas, las teorías matemáticas preexistentes. Sus formalismos son formalizaciones.

Sin embargo, toda vez que no se permite que conocimiento alguno derivado de la teoría preexistente entre en el examen relativo al sistema f 'rmal, es decir: toda vez que desde el punto de vista de este examen no se necesita que exista teoría alguna de la que la teoría formal sea una formalización, nos queda abierta la posibilidad de considerar esta teoría no solamente como un instrumento para la investigación de un sistema preexistente de proposiciones, sino como la materia de estudio de la matemática misma. Existen para esto buenas razones. En efecto, por una parte no hay razón alguna en cuya virtud la materia de estudio de la matemática no debiera extenderse a cualquier clase de manipulación de signos. Y por otra parte, el filósofo fenomenalista, u otro de una actitud similar, bien podría negar, por razones filosóficas de ca

"de lo que entendemos por 'lógica —la 'matemática' la hemos definido ya... Por otra parte, la lógica es aquella rama de la filosofía en la que examinamos la naturaleza y los criterios del razonamiento; en este sentido, llamémosla lógica [1]. Por otra parte, en el estudio de la lógica [1] podemos construir sistemas formales que tengan una aplicación en aquélla; tales sistemas y algunos otros los designamos a menudo como 'lógica'. Tenemos, pues, en esta forma, 'lógicas' bivalentes, trivalentes, modales, brouwerianas, etc., algunas de las cuales sólo se relacionan con la lógica [1] indirectamente. El estudio de estos sistemas lo designaré como lógica [2]. El primer punto relativo a la conexión de la matemática con la lógica es que aquélla independiente de la lógica [1]. . . Ya sea que en la lógica [1] haya o no principios *a priori* de razonamiento, cuando menos no los necesitamos para la matemática."

Hilbert no ha tratado nunca explícitamente y con algún detalle el problema filosófico de la matemática aplicada. Parece favorecer el punto de vista de que se da un isomorfismo parcial entre la matemática pura y el reino de la experiencia al que se aplica. O sea que la aritmética elemental es o bien ella misma la materia de estudio empírica de nuestra investigación —una "física" de símbolos-trazos y operaciones con trazos—, o bien puede ponerse en correspondencia con alguna materia de estudio empírica, como por ejemplo, para servirnos de un caso banal, las manzanas y las operaciones con manzanas. Por otra parte, las partes no elementales de la aritmética no ampliada carecen de correlatos empíricos. Su objeto está en completar, sistematizar y preservar el núcleo elemental, el único que o es empírico o tiene correlatos empíricos.

Según Curry, quien es perfectamente explícito al respecto, hemos de distinguir entre la *verdad* de una fórmula dentro de un sistema formal —esto es, el enunciado derivable dentro del sistema— y la *aceptabilidad* del sistema como un todo. La primera es "una materia objetiva a cuyo propósito todos podemos ponernos de acuerdo, en tanto que la otra puede implicar acaso consideraciones ajenas".[14] Así, pues, considera que "la aceptabilidad del

14 *Op. cit.,* **p. 60.**

nuestros enunciados a propósito de estas construcciones son *demonstrationes ad oculos,* leídas, en cierto modo, en la percepción. Son enunciados sintéticos verdaderos. Sin embargo, su evidencia no es ni la de las tautologías lógicas ni, según opinaba Kant, la que surge de los elementos particulares supuestamente *a priori* Es la evidencia, antes bien, de enunciados fenomenalistas muy sencillos o de los datos de la percepción. En otros términos, los enunciados a propósito de las construcciones matemáticas son enunciados empíricos que entrañan el menor riesgo posible de error. Ésta es la razón de que, al examinar el proceso de la prueba —uno de los principales sujetos de la ciencia de los formalismos—, Curry diga, en forma muy natural, que "resulta difícil concebir un proceso más definido y objetivo".

Para Hilbert, la *raison d'étre* de los sistemas formales es la de salvar y preservar las teorías clásicas preexistentes —si bien algo modificadas— y, en particular, la teoría de los conjuntos, de Cantor. Para Curry, los sistemas formales son los sustitutos de la matemática clásica. De estas diferencias fundamentales entre el formalismo moderado y el estricto se siguen otras. Para Hilbert, que trata de establecer la congruencia (lógica) de teorías *vía* la congruencia (formal) de sistemas formales, un sistema formal (formalmente incongruente es inútil. No así, en cambio, para Curry. Éste sostiene, en efecto, que para la aceptabilidad o la utilidad de un sistema formal "una prueba de congruencia no es ni necesaria ni suficiente".[12] Sostiene que sistemas formales efectivamente incongruentes se han revelado en el pasado como de la mayor importancia, por ejemplo, para la física.

Tanto Hilbert como Curry niegan la posibilidad de deducir la matemática de la lógica. Sin embargo, en tanto que Hilbert considera principios de razonamiento que son suficientes para la aritmética elemental como principios lógicos de una lógica finita y, en cierto modo, mínima, Curry, en cambio, separa la lógica y la matemática en forma más categórica todavía. Todo gira alrededor, dice,[13]

[12] *op. cit., p.* 61.
[13] *Op. cit.,* p. 65.

lismos. Hilbert señala una clase de armonía preestablecida que favorece el progreso dé la matemática y de las ciencias naturales. Los resultados conseguidos en la persecución de propósitos totalmente distintos proporcionan a menudo el instrumento tan necesitado para un nuevo objetivo científico. El aparato lógico de los *Principia Mathematica,* que sobre la base de investigaciones anteriores con objetivos todavía distintos fue concebido con el propósito de reducir la matemática a la lógica, proporcionó, en el caso propio particular de Hilbert, el instrumento *casi* listo para la ejecución de su programa totalmente distinto. Donde los *Principia Matheniatica* fallan es en su formalización incompleta. No son por completo, en efecto, un sistema de reglas para manipular signos y fórmulas, y en particular fórmulas teorémicas, con completa independencia del hecho de que se las pueda interpretar como proposiciones de la matemática clásica. Sin embargo, los *Principia Mathematica* constituyen un fundamento *casi* perfecto para la formalización rigurosa de dicha matemática.

En efecto, de los sistemas formales, aquéllos esbozados al examinar la filosofía logicista de la matemática son tan buenos ejemplos como cualesquiera otros. Esto es así, en particular, por lo que se refiere al cálculo preposicional y al sistema formal de la lógica clásica de Boole. Aquí no haremos más que describir la naturaleza general de los sistemas formales. Son máquinas para la producción de objetos físicos de diversas clases, máquinas cuyas propiedades han sido objeto de extensas y detalladas investigaciones por Hilbert, Bernays, Post, Carnap, Quine, Church, Turing, Kleene y muchos otros. Como resultado de la labor realizada por estos autores, los términos "máquina" y "propiedades mecánicas" hace tiempo que han dejado de ser metafóricos en contextos lógicos. (En efecto, las penetraciones más importantes en la naturaleza de los formalismos, esto es, los teoremas más importantes de la matemática o, como se la llama también, de la teoría de la prueba, pueden formularse de la manera más clara y sencilla como enunciados en el sentido de que ciertas máquinas productoras de fórmulas pueden construirse, en tanto que otras no.)

análisis clásico para fines de aplicación en física. . . se establece en razones pragmáticas, y que ni la cuestión de la evidencia intuitiva ni la de la prueba de congruencia la afectan en lo más mínimo. El criterio primordial de acep tabilidad es empírico, y las consideraciones más importan tes al respecto son la idoneidad y la simplicidad". [15] Cuan do se llega a la aplicación de la matemática, Curry es pragmático. No va tan lejos, con todo, como el lógico pragmático cuyo concepto de la matemática pura es asi mismo pragmático y quien niega que las proposiciones lógicas, matemáticas y empíricas puedan distinguirse por criterio alguno preciso. (Véase p. 68.) El dominio de las teorías formales y las proposiciones acerca de sus pro piedades formales están, supone Curry, perfectamente de-limitados.

Antes de describir en líneas generales algunos sistemas formales, se nos permitirá tal vez una caracterización me tafórica, imprecisa, de las ideas básicas del formalismo. Según la mayoría de los filósofos, de Platón a Frege, las verdades de la matemática existen (o "subsisten") inde pendientemente de que sean o no conocidas e indepen dientemente de su materialización en proposiciones o fórmulas, pese a que éstas sean necesarias para que las verdades puedan captarse. Fue el programa ingenioso de Hilbert —anticipado en cierto punto por Leibmz— el de plasmar las verdades de la matemática clásica, de tal modo que los rasgos perceptuales de los objetos o los procesos que las producen correspondan a rasgos lógicos de las proposiciones matemáticas. Las fórmulas teorémicas son, en cierto modo, los cuerpos, y las verdades desnudas, las almas, cada una de las cuales posee cuando menos un cuerpo. Este programa, según se explicará con algo más de precisión más adelante, no puede llevarse a cabo. Ha sido demostrado por Gódel que todo vaciado de la mate mática clásica en un formalismo ha de ser incompleto; en efecto, hay siempre algunas verdades matemáticas que no encarnan en fórmulas teorémicas.

Para poder apreciar este resultado, necesitamos ser un poco más específicos acerca de la naturaleza de los forma-

15 *Op. cit.*, p. 62.

el número y la clase de “argumentos” para cada uno. Por ejemplo, podemos especificar como predicados piezas de madera con *n* hoyos a los que pueden adaptarse canicas tanto incluidas como sueltas y determinar luego que nuestras proposiciones elementales son todas aquellas piezas de madera cuyos hoyos hayan sido llenados debidamente con canicas incluidas o sueltas.

3] *Teoremas elementales*

a] *Axiomas,* esto es, “proposiciones” elementales, de las que se afirma que son “ciertas” incondicionalmente; b] *reglas de procedimiento,* que son de la siguiente forma: “Si P_p P_9, . . . , P_{wl}, son teoremas elementales sujetos a tales y cuales condiciones, y si Q es una proposición elemental que tiene con P_v P_2, . . . , P_m tal y cual relación, entonces Q es cierta". Por ejemplo, si dos piezas de madera con hoyos rellenados con canicas son teoremas elementales, entonces toda pieza de madera producida a partir de las anteriores pegándolas con cola es “verdad” asimismo.

Con objeto de poder hablar de la estructura primaria hemos de tener nombres para los elementos, las operaciones y los predicados, así como indicaciones de la manera en que los predicados se aplican a los términos. La especificación de las características que constituyen la estructura primitiva de un sistema formal ha de ser efectiva o *definida* (término empleado por Carnap) . Esto significa que ha de ser posible decidir, después de cierto número de pasos, si un objeto posee o no esta característica. En efecto, si un sistema formal ha de ser susceptible de ser tratado por métodos finitos (como lo hace Hilbert) , o sí, en otros términos, lo que ha de probarse a su propósito puede probarse por demostraciones *ad oculos,* entonces las propiedades para ser un predicado formal, un axioma formal o una fórmula formalmente derivada de otra de acuerdo con una regla de procedimiento han de estar todas ellas definidas.

La propiedad para ser una fórmula teorémica podrá estar definida, pero no necesita estarlo. En cambio, la relación formal entre una fórmula y la serie de fórmulas que

El formalismo estricto considera a toda la matemática, según vimos, como la ciencia de los sistemas formales, sean o no formalmente congruentes y tanto si se proponen como no ser formalizaciones de teorías preexistentes, con lo que ha hecho que la naturaleza de los formalismos *per se* sea más fácil de captar. Hacer esto se ha convertido en necesario para toda filosofía de la matemática, porque no cabe abrigar duda alguna de que, sea lo que fuere lo que la matemática pueda significar, ahora o en el futuro, ésta habrá de comprender siempre la ciencia de los sistemas formales.

Una caracterización muy clara de los sistemas formales en general es la proporcionada por Curry.[16] Cada uno de ellos es definido por un conjunto de convenciones, lo que se designa como su estructura primaria. Al indicar la estructura primaria, proporcionamos a un ingeniero todos los datos que necesita (aparte de sus conocimientos de ingeniería) para construir la máquina productora de fórmulas requerida. Curry distingue en toda estructura primaria las siguientes características:

1] *Términos*

Estos son: a] *Elementos,* que se especifican estableciendo una lista de objetos de tipos diversos, por ejemplo, señales sobre papel, piedras u otros objetos físicos; b] *operaciones,* esto es, modos de combinación para formar nuevos términos, y c] *reglas de formación,* que especifican cómo deben construirse los nuevos términos. Por ejemplo, si figuran canicas y cajas entre nuestros términos, y la inclusión de canicas en las cajas entre nuestras operaciones, podríamos adoptar la regla de formación que permitiera la inclusión de una canica en cada caja, y estipular que las canicas incluidas pertenecen al mismo tipo de término que las sueltas.

2] *Proposiciones elementales*

Éstas se especifican dando una lista de "predicados", con

[16] *Op. cit.,* cap. iv.

mal reviste grán importancia filosófica, y esperará un informe de los resultados logrados por los matemáticos. A primera vista, el vaciado completo de las teorías matemáticas en formalismos parecerá acaso posible, y luego podrá cuando menos sostenerse que las teorías preexistentes son meramente "intuitivas", en el sentido algo despectivo en que emplean el término los matemáticos en las contadas primeras páginas de sus tratados antes de entrar en materia, y que las teorías en cuestión son meramente preliminares heurísticos para la construcción de formalismos y de enunciados a su propósito.

Por consiguiente, hemos de intentar dar una explicación de algunos resultados de la ciencia de los sistemas formales, confiando -como lo hemos hecho siempre hasta el presente— en que los matemáticos habrán efectuado su labor eficazmente.

4] *Algunos resultados de la metamatemática*

hólo podemos dar un esbozo muy breve y general del principal resultado de Gódel y de algunos desarrollos relacionados con el mismo.[38] La supresión de "tecnicismos" ha le significar aquí inevitablemente supresión de argumentos 1 nociones esenciales. Despertar el apetito del lector sin ifirmaciones crasamente erróneas es tal vez lo mejor que >e pueda hacer.

Suponemos con Hilbert que el método y los resultados

18 El trabajo principal de Godel es "Über formal nnentscheidbare Sátze der Principia Mathematica und venvandter Systeme,I", en *Monatshefte für Mathematik und Physik,* 1931. vol. 38. Véase una "exposición libre del teorema de Godel y del teorema de Church" en J. B. Rosser y, concretamente, en su artículo que lleva dicho título, en *Journal of Symbolic Logic,* 1939, vol. iv, núm. 2. Una exposición libre y formal de la teoría de Godel se encuentra en *Sentences Undecidable in Pormalized Arithmetic,* de Mostowski, Amsterdam, 1952, y también en Kleenc, *op. cit.,* y Hilbert-Bernays, *op cit.,* vol. 2. La teoría de las funciones recursivas está desarrollada a partir de los primeros principios y sin simbolismo lógico en R. Péter, *Rekursivc Funktionen,* 2[9] ed., Budapest, 1958. Véase un excelente estudio del estado actual de la teoría en John Myhill, *Phílosophy in Mid-Century,* Florence, 1958.

constituyen su prueba ha de estar, por supuesto, definida. En la mayoría de las teorías matemáticas la fórmula no lleva en la frente, por así decir, la señal de que es un teorema, pero la prueba de ello, una vez dada, ha de ser susceptible de comprobación mediante un número finito de pasos.

Se han construido muchos sistemas formales por matemáticos en el presente siglo. El motivo de la actividad ha sido por lo regular la necesidad de encarnar proposiciones en fórmulas, de tal modo que las propiedades y las relaciones formales *de las fórmulas* garanticen propiedades y relaciones lógicas correspondientes de las proposiciones. En efecto, según vimos, el propósito último del programa de Hilbcrt. y lo que constituiría su consumación, es una prueba de la congruencia lógica del cuerpo principal de la matemática clásica alcanzada a través de la prueba de la congruencia formal de un sistema formal adecuado.

Tal como ha sucedido con frecuencia anteriormente en otras ramas de la matemática, el estudio de los sistemas formales condujo a resultados inesperados, a nuevos problemas, nuevas técnicas y, cuando menos, a una nueva rama de la matemática pura, esto es, la teoría de las funciones recursivas. La importancia de esta teoría la conceptúan los expertos como muy grande. Así, por ejemplo, E. L. Post, que no sólo ha hecho aportaciones importantes al terna sino que ha expresado también sus ideas principales en una forma que las ha hecho accesibles a los no expertos, expresa el punto de vista de que la formulación de la noción de funciones recursivas "puede desempeñar un papel en la historia de la matemática combinatoria sólo inferior en importancia a la formulación del número natural".[17]

El lector de un libro sobre filosofía de la matemática no puede esperar que se le proporcione a su través un conocimiento completo de las nuevas ideas y las nuevas técnicas. Sin embargo, apreciará fácilmente, con todo, que la cuestión de hasta qué punto pueda establecerse la correspondencia entre la teoría anterior y el sistema for-

[17] *Rullctin of thc American Mathematical Society,* 1944, vol. 50, Nº 5.

de modo que, por ejemplo, 1 corresponde a 1. Las pro piedades formales de los enteros se expresarán por IT(.), distinguiéndose propiedades formales distintas por medio de subíndices distintos. Si PF_0(.) es la contrapartida for mal de “x es un número primo”, entonces *W_o(5)* es la contrapartida formal de la proposición artimética de que 5 es un número primo. El conjunto de todas las propieda - des formales de los enteros puede ordenarse de muchas maneras en una serie, y consideramos una de éstas, por ejemplo:

[1] w\(.), IV_2(.), fr $_3$(.),...

Con objeto de construir ahora una proposición formal au- torreferente, formulemos primero cualquier proposición formal a la que hayamos llegado “saturando” alguna pro piedad formal con el numeral correspondiente a su sub índice. Tales proposiciones formales son 14 (1), IV_O(2), IV_3(3), . . . Empezamos por entresacar, por ejemplo JV_5(5). Esta proposición formal podrá ser o no un teorema formal de *F.* Supongamos que no lo es, o sea que

JT-(5) no es un teorema formal de *F*

Esta proposición no es, en vista de esto, una proposición formal de *F,* pero es una proposición real a propósito de una proposición formal, esto es, a propósito de la propo sición formal IT_5(5). Es, en el sentido de Hilbert, un me- taenunciado perteneciente al metalenguaje en que habla- mos de *F.* Y en forma análoga, la propiedad:

[2] fV_n(n) no es un teorema formal de *F*

no es, en vista de esto, una propiedad formal pertene- ciente a *F,* sino una metapropiedad perteneciente al me- talenguaje. No parece plausible que esta propiedad for - mal tenga una contrapartida entre las propiedades forma - les de *F* y, en particular, entre los miembros de la se* rie [1],

Pero Gódel muestra que [2] ha de tener tal contra - partida en [I], esto es, que un miembro de la serie [1] formaliza la metapropiedad [2] o, lo que viene a ser lo mismo, que esta metapropiedad es la interpretación o el

de la aritmética elemental (véase p. 94) no necesitan justificación, y consideramos un sistema formal congruente F, suficientemente expresivo para permitir la formaíización en él de la aritmética elemental. Esto implica el requisito de que todas las expresiones aritméticas correspondan a expresiones formales, de tal modo que ningún teorema formal de *F* corresponda a una falsa proposición aritmética. Si un enunciado formal, digamos *f,* es la formaíización de una proposición aritmética *a,* se dice también de *a* que es una interpretación (aritmética) de *f* o el significado intuitivo de ésta.

Digamos que *F* formaliza *por completo* la aritmética elemental, a condición de que, en el caso de todo enunciado formal f, que es la formaíización de un enunciado aritmético, *f* o $\sim f$ son un teorema formal de *F* o, en resumen, a condición de que *f* sea decidióle. Hilbert perseguía la formaíización completa de (sustancialmente) la totalidad de la matemática clásica. Gódel ha demostrado que inclusive un sistema formal que no formaliza más que aritmética elemental *no* la formaliza por completo.

La incompletidad de *F* se establece mediante la construcción real de un enunciado formal *f* que formaliza una proposición aritmética, en tanto que, sin embargo, ni / ni $\sim f$ son un teorema formal de *F,* esto es, en tanto que f es indecidible. La interpretación de f nos recuerda la paradoja del mentiroso: “La proposición que enuncio ahora es falsa”. Si la afirmación de la proposición es correcta, entonces la proposición es falsa, de donde se sigue que la afirmación es incorrecta. El enunciado es “a propósito” de sí mismo. Afirma su propia falsedad y no enuncia nada más. Es esta clase de autorreferencia la que posee la proposición formal de Gódel. Sin embargo, en tanto que en la paradoja del mentiroso la relación entre la expresión lingüística y su significado dista de ser clara, la proposición formal de Gódel, en cambio, es tan clara como *F* y la aritmética.

Veamos ahora la construcción del *f* indecidible (siguiendo la exposición de Mostowski) . Toda vez que *F* formaliza aritmética elemental, los enteros y las propiedades de los enteros han de tener contrapartidas formales en *F.* Los enteros formales o numerales se representan en negritas,

Después de estos preparativos (que en la prueba real requieren, por supuesto, más tiempo, espacio y esfuerzo), podemos dar la traducción de Gódel de [2], esto es, de

IV„(n) no es un teorema formal de F

como

[3] $\phi(n, n)$ no e T,

esto es, el valor de $\phi(n, n)$ es un número Gódel que no es miembro de la clase T de los números Gódel de los teoremas formales de F.

Ahora bien, [3] es una propiedad de enteros pertenecientes a la aritmética elemental. Por consiguiente, ha de tener una formalización en F, que ha de encontrarse además en la serie [I] de los IV(.), ya que esta serie contiene toda propiedad formal de los numerales. Supongamos, pues, que hemos encontrado que [3] es formalizada por el miembro g-ésimo de la serie, esto es, por $W_q(.)$.

La propiedad formal IF 7(.) toma numerales como argumentos, entre ellos también el numeral q. Consideramos, por consiguiente, la proposición formal IV (q), que es la proposición formal indecidible que deseábamos construir. La interpretación de f7 9(q) es: el entero q tiene la propiedad formalizada por W (.), esto es, la propiedad aritmética: $\phi(n,$ n) no € T o, en forma equivalente: IV (q) no es un teorema de F.

Si W (q) fuera un teorema formal de F, formalizaría una proposición aritmética falsa. Si $\sim W_q$(q) fuera un teorema formal de F, entonces W (q) formalizaría una proposición aritmética verdadera. Pero, en este caso, una proposición aritmética falsa, esto es, $\sim W_q$(q), estaría formalizada por un teorema formal de F. Y toda vez que, *ex hypothesi* F es una formalización congruente de aritmética elemental, ninguno de los dos casos puede produnse. JVc (q) es indecidible, y F es incompleta.

Se obtienen variantes del resultado de Gódel cambiando los supuestos relativos a F, y los métodos de prueba, todo lo cual, sin -embargo, permite la construcción de las pro* posiciones formales deseadas.

Las ideas y las técnicas, especialmente la aritmetización

significado intuitivo de un miembro de la serie [I]. El método con el que lo muestra se conoce como la aritmetización (o la godelización) del metalenguaje o la metamatemática, procedimiento que es perfectamente análogo a la aritmetización de la geometría euclidiana por Descartes, esto es, la provisión de coordenadas numéricas para objetos no numéricos, y de relaciones numéricas para relaciones no numéricas entre estos objetos.

A cada uno de los signos de *F* —por ejemplo, ~, v, (— se le asigna un entero, de modo que toda serie finita de signos corresponde a una serie finita de enteros. Resulta fácil encontrar funciones que establezcan una correspondencia biunívoca entre series finitas de números y números. (Por ejemplo, si acordamos asignar a una serie n_1, n_2, . . . n_m el producto $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}$, en donde las *p* son los números primos en su orden natural, resulta siempre posible reconstruir la serie a partir del número mediante factorización.) En esta forma, a toda sucesión de signos (por ejemplo, a toda proposición formal) y a toda sucesión de sucesiones de signos le es asignada su coordenada numérica o su número de Gódel. Los enunciados acerca de expresiones formales pueden remplazarse en esta forma por enunciados a propósito de enteros.

Por otra parte, a toda clase de expresiones corresponde una clase de números de Gódel. Las clases de números Gódel necesitados para el teorema de incompletidad están todos definidos recursivamente, esto es, cada elemento puede calcularse efectivamente a partir de los anteriores. Lo mismo cabe afirmar de las relaciones requeridas entre los números de Gódel y de las funciones que toman los números de Gódel como argumentos y valores. Es posible, en particular, delimitar en esta forma una clase *T*, clase de todas las proposiciones formales que son teoremas formales en F. (El enunciado de que *pv p* es un teorema formal de F se expresa luego de modo equivalente por *C*e *T*, en donde *c* es el número Gódel de *pv~p* en F.) Y es igualmente posible indicar en esta forma una función recursiva <A(n,p) de dos argumentos integrantes cuyo valor es el número de Gódel de la proposición formal PV_n (p), esto es, la proposición formal que obtenemos “saturando" en n-ésimo número de la sucesión [I] con el numeral p.

los motivos principales para el desarrollo de esta teoría fue el hecho de que abandonando la cuantificación irrestricta pueden evitarse las antinomias de los conjuntos teóricos, toda vez que la "existencia" del conjunto se hace equivalente a la computabilidad de sus miembros. [20]

Una de las funciones recursivas más sencillas puede servir como definición de añadir a un entero no negativo *a* otro entero n. Consideremos

<¿>(0,¿z)_ a

ϕ(n-|-l, *a)* — <¿(n,ú)-|-1

La primera ecuación nos indica aquí el valor de la adición de 0 a *a.* La segunda nos dice cómo encontrar el valor de la adición de n-f-1 a *a,* una vez que se ha encontrado el valor de la adición de *n* a *a.* Así, pues, podemos encontrar los valores de la función para *n—Q,* n = l, 7i—2, n=3, etc. Son *a,* a+1, *a*+2, a+ 3, etc. Si escribimos B(«) en lugar de a-|-l, entonces pfa) expresa la operación consistente en formar el sucesor inmediato de un entero no negativo. Nuestra función recursiva puede luego escribirse así:

< (0, *a)* — *a*

<£(?(")■«)= (3(</>(M)■

Y en forma análoga podemos definir la multiplicación de un entero positivo fijo *a* por un entero positivo *n.* Si $\phi(n,a)$ = *Ti' a,* tenemos:

<£(0,a) = 0

<£(n-|-l, ü) ~ <£(n,a)+a ■

Y en la misma forma podemos definir la exponenciación y otras funciones de la aritmética.

La forma de estas funciones recursivas es:

<¿(0)= Á

<£(n-pl) = p(n, $\phi(n)$)

20 Véase también R. L. Goodstein, *Recurstve Number Theory,* Amsterdam, 1957.

de metamatemática, que dan el teorema de la falta de completidad y sus variantes, producen también el segundo teorema de Godel relativo a los formalismos de tipo *F*, *Si F* es congruente y si *f* es una formalización del enunciado de que *F* es congruente, entonces f no es un teorema formal de *F.* En resumen, la congruencia de *F* no se deja probar en *F.*

El segundo teorema implica la imposibilidad de demostrar la congruencia de la matemática clásica formalizada por métodos finitos. Porque, pese a cierta vaguedad en la delimitación de las pruebas finitistas, toda prueba tal puede aritmetizarse e incorporarse a F. Así, pues, demostrar la congruencia de *F* por medios finitos o "finitarios" equivale a demostrar la congruencia de *F* en *F,* lo que es imposible por el segundo teorema de Godel. El programa original en vista de una prueba de congruencia ha de abandonarse, o ha de relajarse volviendo a definir la "prueba finitista".

Podemos formular ahora algunas breves observaciones a la teoría de las funciones recursivas, que era el principal instrumento de las pruebas de Godel. (Los comentarios siguen, en lo principal, el tratamiento de R. Péter.) La función recursiva es una función que adopta como argumentos enteros no negativos, cuyos valores son a su vez enteros no negativos, y definida de tal modo que sus valores pueden calcularse "efectivamente". El significado del "cálculo efectivo" mismo, o de la "compu labilidad", se aclara en el curso del desarrollo de la teoría. La definición de la función recursiva no depende de supuesto alguno ya sea de que *existe* entre la totalidad de' los enteros uno que sólo está especificado como poseedor de cierta propiedad, o de que *todos los miembros* de esta totalidad poseen una determinada propiedad. Así, pues, la teoría de las funciones recursivas puede desarrollarse sin el cuantíficador universal o existencial. El hecho de que una gran parte de la aritmética y la lógica puede desarrollarse en esta forma fue reconocido por Skolem ya en 1923.[19] Uno de

18 *Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurríerende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veranderlichkeiten mit unendlichen Ausdehnungsberetch,* Videnskapsselskapets Skrifter i, Math. Natunv. Kl. 6, 1923.

la matemática, inclusive la de "siendo un teorema formal de F", se hacen expresables como funciones recursivas primarias y como relaciones entre números de Gódel.

Se sigue de un teorema de Turing (1937) que la computación de cualquier función recursiva primaria puede dejarse a una máquina. En efecto, demostró que una clase más amplia de funciones, las llamadas *funciones recursivas generales,* son computables por máquinas Turing. Antes de haberse demostrado esto, Church propuso que la noción más bien vaga de computabilidad efectiva se analizara como resolubilidad por funciones recursivas generales. Esta propuesta estaba justificada por los propios resultados de Church y por otros resultados, los cuales, pese a que a primera vista no tuvieran conexión, se revelaron, con todo, equivalentes. Por lo que se refiere al problema de identificar la computabilidad efectiva con la resolubilidad por funciones recursivas generales, la opinión enterada ya no sigue dividida.[22] A propósito de esta cuestión nada de provecho puede decirse en el presente contexto por este autor. La teoría está evolucionando hacía una nueva rama de la matemática pura, cuya, significación en relación con los problemas planteados por Hilbert no es más que uno de sus aspectos importantes, y tal vez ya no el más importante.[23]

[22] Véase Péter, *op. cit.,* §§ 20-22.
23 Véase Myhill, *op. cit.,* p. 136.

Aquí ϕ es una función de una variable, p una función de dos variables, y *K* una constante o función sin ninguna variable. La variable *n* que se sustituye sucesivamente por O, 1, 2, etc., se designa como la variable de recursión. Pero los valores de <£, y por consiguiente de B, pueden depender también de otras variables, las cuales, sin embargo, no entran en el proceso de recursión, durante el cual se las trata como constantes, siendo sustituidas por valores diferentes ya sea antes o después de la recursión, esto es, consistiendo el cálculo en sustituciones sucesivas de *n.* De acuerdo con la terminología usual de la matemática, estas otras variables se llaman "parámetros". Una definición de la forma

ϕ>(0, a_1, flg, •••, Uy) = $\alpha(a_1$, a2*•∎«» $a_r)$

¿(nq-1, a_{lr} . . . , a_r) = (3(n, a_v a_2, . . . , a_T, ϕ $(n_v$ a_v a_2, . . . , a_r)) se designa como *recursión primaria.*

Si están dadas, dos funciones, podemos formar otra nueva sustituyendo una variable por una función en la otra, por ejemplo, de $\phi(x, y, z)$ y ip(u) obtenemos por sustición: $\phi(\psi(u), y,$ z), <¿(x, *y,* ip(u)) , $\psi(\phi(x,$ y, z)), etc. Las recursiones y las sustituciones primarias dan una clase grande e importante de funciones llamadas *funciones recursivas primarias,* caracterizadas[21] como aquellas funciones cuyos argumentos y valores son enteros no negativos y los cuales, partiendo de 0 y n 4- 1, se definen por un número finito de sustituciones y recursiones primarias.

En sus pruebas, Gódel sólo se sirvió de funciones recursivas primarias. Para ver cómo las propiedades formales pueden aritmetizarse, consideramos la definición de las sucesiones recursivas. La sucesión B $(a_{lt}$ . . . , $a_r)$ es recursiva primaria si existe una función recursiva primaria $\beta(a_1, \ldots, a_r)$ tal que sea igual a 0 si y sólo si la sucesión *B* está entre a_p . . . , a_r. Si W(a) es una propiedad, es recursiva primaria a condición de que exista una función recursiva primaria que sea igual a 0 si y sólo si *a* tiene *W.* La sucesión complementaria *B'* a_1, . . . , *a,),* de *B*(a_v . . .» u_r), es, pues, recursiva primaria y está sólo si $\beta(a_1, \ldots, a_r)$ $\neq$ 0. En esta forma, las nociones "siendo un complemento", "siendo una conjunción" y nociones más complejas de

21 péter, *op. cit.,* p. 32.

eos, b] son sintéticos *a priori* en el sentido de Kant, y c] son empíricos; por otra parte proviene de su convicción aparente de que se ha demostrado que la primera posibilidad no podía sostenerse y de que la segunda debía descartarse por demasiado oscura y como inapropiada a la variedad de los diversos sistemas matemáticos. Con todo, por modesta y silenciosamente que sea, se está formulando el postulado de que las proposiciones de la matemática pura son empíricas.

Considerando ahora las proposiciones de la matemática aplicada —a propósito de la adición física de manzanas, etc.—, observamos que la posición del formalista requiere una vez más comentario. A primera vista, podríamos tal vez sentirnos inclinados a decir, al respecto, que se da efectivamente una correspondencia biunívoca directa entre la proposición (metamatemática) de que <1 + 1 = 2> es una fórmula-teorema y el enunciado de que una manzana y una manzana son dos manzanas. Todo lo que *parece* requerirse es poner manzanas y operaciones con manzanas en lugar de los trazos y las operaciones con trazos. Sin embargo, la situación no es en modo alguno tan simple.

Resulta instructivo comparar el problema de la matemática aplicada tal como se le plantea al formalista y tal como se le plantea al logicista. En efecto, el logicista ha de considerar "1 + 1 = 2" en la transcripción lógica

U] (*)(y)(((*e 1) & (y e i)) = ((* U y)£2))
(véase p, 62)[1]

Y ha de considerar además dos versiones de "una manzana y una manzana son dos manzanas", esto es:

[2a] ((<z 1) & (ó G 1)) ==((fl VJ ó) G 2)

en donde *a* y *b* son dos clases especificadas de unidad sin elementos comunes, y (a U ó) es su suma lógica, y

[2b] una ley empírica de la naturaleza acerca del comportamiento de las manzanas.

[1] Se supone que x e *y* son distintos v no vacíos.

CAPÍTULO QUINTO

LA MATEMÁTICA COMO CIENCIA DE LOS SISTEMAS FORMALES: CRÍTICA

Al examinar la filosofía formalista de la matemática, proseguiremos nuestro plan de estudiar su explicación de la matemática pura, de la matemática aplicada y de la noción de infinito. Como en el caso del logicismo, consideraremos ante todo los ejemplos sencillos de "1+ 1 =2" y "una manzana y una manzana son dos manzanas".

Los formalistas distinguen, según vimos, entre la sucesión de los signos < 1 + 1 = 2 > (la fórmula) y el enunciado propio en el sentido de *que* esta fórmula o el proceso que la produce poseen ciertas características literalmente formales, esto es, las características, según se ha dicho, de constituir una fórmula-teorema. La sucesión <1 + 1 = 2> no es un enunciado, sino un objeto físico, y como tal no es ni verdadera ni falsa. Lo que es cierto o falso es el enunciado de que esta sucesión, <1+ 1 = 2> es una fórmula-teorema. En otros términos: mientras desde el punto de vista logicista la verdad de la proposición matemática tiene sus raíces en la lógica, su verdad resulta, desde el punto de vista formalista, del carácter indudable de la descripción que da de situaciones físicas experimentales muy simples. Para el logicista, las proposiciones aritméticas son proposiciones lógicas disfrazadas, en tanto que para el formalista son proposiciones empíricas disfrazadas. Y toda vez que nos vimos obligados a examinar y finalmente a rechazar el primer postulado, necesitamos ahora examinar también el otro.

El postulado formalista aparece envuelto, de buenas a primeras, de un aire de paradoja. Esta impresión parece provenir de dos fuentes: esto es, por una parte, de su aparente supuesto de que sólo son posibles tres posiciones, a saber: a] los enunciados de la matemática pura son lógi-

podemos añadir, lógicamente evidentes) de la matemática pura y los enunciados empíricos de la matemática aplicada, así se enfrenta el formalista, por otra parte, al problema de haber de explicar la relación entre enunciados empíricamente evidentes de matemática pura y enunciados, no evidentes de matemática aplicada.

Aparte del problema general de la condición y la función lógicas de las proposiciones de matemática pura y matemática aplicada que acabamos de mencionar, toda filosofía de la matemática ha de adoptar también una posición con respecto a la cuestión de las totalidades infinitas. El formalista no se permite el supuesto, según vimos, de conjuntos realmente infinitos, o el uso de métodos transfinitos en el marco de la matemática. Permite, en cambio, el empleo de *símbolos* para entidades realmente infinitas. Estos símbolos los considera como objetos perceptivos a la manera de las expresiones-trazos, en el ámbito de la actividad reglamentada de la manipulación de signos, que constituyen la materia perceptiva de estudio de la matemática. Ya vimos que el programa de Hílbert de establecer una correspondencia biunívoca entre todas las proposiciones (aparentemente inocuas) de la matemática clásica por una parte, y fórmulas que las encarnen, por otra parte, se había revelado —así lo había demostrado Godel— como imposible o, cuando menos como problemático. Esto plantea, entre otras, la cuestión de si sí o no y en qué sentido la adjunción de fórmulas que encarnen enunciados a propósito de totalidades infinitas a fórmulas de aritmética elemental puede considerarse que justifique el empleo de infinidades reales en la matemática clásica. Se trata, una vez más, de una cuestión del "paraíso de Cantor”. La prueba de incompletidad, de Godel, ¿nos ha expulsado de él, o ha reducido simplemente su territorio?

En conexión con todos estos problemas, en sus varíantas formalistas, está la relación entre la lógica y la matemática. Los razonamientos metamatemáticos de los formalistas se presentan como algo percibido inmediatamente en una experiencia perceptiva indudable, cual *demonstrationes ad oculos,* que ni necesitan justificación ni son susceptibles de ella. Por consiguiente, hemos de considerar la po-

Según argumentamos, si [1] es lógico, entonces [2a] también lo es. Pero, a diferencia de [2a], [2b] es empírico; y el logicista nos queda a deber la explicación de la relación entre la proposición *lógica* [1] y la proposición *empírica* [2b], Al criticar el logicismo sostuvimos que los conceptos —los conceptos numéricos y el concepto de adición— son distintos en [1] y en [2b], y que, al no percibir esta diferencia y al relacionar, antes bien, conceptos empíricos y no empíricos, el logicismo ni siquiera enuncia el problema de la relación entre [1] y [2b], y no digamos ya que falla en cuanto a proponer una solución.

La situación a la que se enfrenta el formalista es algo parecida. En efecto, ha de considerar [1] como la proposición matemática "1 + 1 — 2" en su interpretación matemática, esto es: "Por una parte, el poner 1 después de 1, y por otra parte el producir la sucesión 11 (efectuadas ambas operaciones de acuerdo con las reglas de la yuxtaposición) , esto conduce a la misma expresión-trazo, o sea 11." Diremos que este enunciado y otros enunciados matemáticos similares, susceptibles de demostración *ad oculos,* son empíricamente evidentes. El formalista ha de considerar además dos interpretaciones de "una manzana y una manzana son dos manzanas", esto es:

[3a] un enunciado que difiere del enunciado acerca de la yuxtaposición de trazos únicamente en cuanto es enunciado de manzanas, y

[3b] un enunciado acerca de alguna adición material de manzanas (ponerlas en cajones y sacarlas después de unos días, etc.), que *no* está definido de acuerdo con las reglas que rigen la yuxtaposición, tal como se la considera en metamatematica.

El punto es éste: si los postulados de matemática pura son empíricamente evidentes, entonces [1] y [3a] son empíricamente evidentes. En cambio, [3b] y las leyes de la naturaleza formuladas matemáticamente no son —o no lo son en el mismo sentido de los términos— empíricamente evidentes. Así, pues, del mismo modo que, por una parte, el logicista se enfrenta al problema de haber de explicar la relación entre los enunciados presuntamente lógicos (y,

remplazarse por otros, sin. que cambie el contenido de aquéllas. Así, pues, los trazos, las piedras, las cáscaras, etc., con los que se realizan efectivamente las operaciones, son meramente representativos: muestras de tipos, para servirnos de una distinción efectuada por C. S. Peirce. Al describir una operación particular —la adición elemental de 1 a 1, pongamos por caso, diciendo que da la cifra 11—, lo que importa es la relación entre los dos conceptos de "adición elemental" y "cifra del tipo 11", y esta relación no resulta afectada si sustituimos por otros signos estos trazos particulares. Es el caso, con todo, que los conceptos (predicados, atributos, etc.) están encarnados por objetos y operaciones perceptivas, y es esta situación perceptiva fácilmente obtenible o fácilmente construible la que permite "captar" en ella la relación entre los conceptos. Esta situación perceptiva podemos provocarla (casi) siempre que queremos, y es esta situación perceptiva la que nos permite "demostrar *ad ocíelos"* la relación entre los conceptos.

En cambio, el concepto de los formalistas, "x es un trazo", no describe en el sentido estricto del vocablo o, lo que viene a ser lo mismo, no está encarnado o ejemplificado, en el sentido propio del vocablo, por trazo particular alguno. Así, pues, los formalistas no pueden menos que suponer que los trazos de los que se ocupan poseen ciertas propiedades que no poseen, en cambio, los que se encuentran en la percepción. Ningún trazo material o perceptivo es permanente, pese a que al convertirlo en objeto de la matemática lo consideremos de modo perfectamente adecuado como tal. En una forma u otra lo "abstraemos" de su impermanencia.

Tal vez la cosa parezca banal. Por una parte, sin embargo, es considerada como lo suficiente poderosa, por Frege,[2] para servir de base principal para su ataque contra variantes anteriores del formalismo, variantes que en este aspecto no difieren mucho de sus formas más modernas, en tanto que, por otra parte, los formalistas contemporáneos y los filósofos que se les aproximan se percatan tam-

2 *Grundgesetze,* vol. 2. §§ 86 sj.: hay también traducciones de Geach y Black, pp. 82 *ss.*

siciÓn de los formalistas en relación con su lógica intuitiva, su,- delimitación con respecto a la lógica no intuitiva, la relación entre una y otra y la relación de ambas con respecto a la matemática.

Un plan razonable de examen será tal vez el que considere primero la concepción de la matemática pura de los formalistas como la manipulación o la construcción de series de símbolos, y de la metamatemática pura como compuestas de 1] proposiciones empíricamente evidentes, y 2] razonamientos relativos únicamente a tales proposiciones. A continuación habría que considerar la explicación de los formalistas de la relación entre estas proposiciones empíricamente evidentes de la matemática pura y las proposiciones de la matemática aplicada, que no son susceptibles de demostración *ad oculos,* sino que dependen, para su verificación, de las técnicas experimental y de observación ordinarias de las ciencias naturales. El problema del infinito podría examinarse a continuación como parte del problema general del carácter de la presunta adjunción de entidades ideales a entidades reales en la matemática clásica, de la adjunción correspondiente de símbolos de entidades ideales a entidades reales, y de los enunciados metamatemáticos acerca de la manipulación de las dos clases de símbolos de una manera puramente formal, terminando nuestro estudio con un examen del concepto formalista de la lógica.

1] LA EXPLICACIÓN FORMALISTA DE LA MATEMÁTICA PURA

Según la explicación formalista, las proposiciones metamatemáticas o describen ciertos tipos de manipulación de símbolos o expresan relaciones inductivas entre tales proposiciones descriptivas. Así, pues, las proposiciones de la matemática son, por lo visto, proposiciones empíricas; los conceptos aplicados al formularlas son conceptos empíricos, y las inducciones correspondientes lo son siempre de enunciados o conceptos empíricos a enunciados o conceptos empíricos.

Está perfectamente claro, por supuesto, que las proposiciones de la matemática no son acerca de operaciones con trazos determinados. En efecto, los trazos pueden

los conceptos correspondientes son exactos en el sentido en que no admiten casos límite. Sucede, sin embargo, que los dos conceptos en cuestión no sólo admiten casos límite separados, sino también conjuntos. En efecto, si acercamos 1 y 1 cada vez más, llegamos a una cifra-trazo de la que es igualmente correcto decir que es semejante a 1 y también semejante a 11. En tanto, pues, que “x es semejante a 1” y “x es semejante a 11” admiten casos límite comunes, los conceptos metamatemáticos correspondientes, en cambio, no los admiten: son conceptos exactos.

Cabría decir, una vez más, que los trazos de los que se ocupa el formalista pueden tratarse *como si* fueran casos de un concepto exacto "x es un trazo". Pero esto no significa que el concepto “x es un trazo (perceptivo)”, que admite casos definidos, no admita *también* casos límite. Lo que dijimos acerca de la diferencia entre el “x es un trazo (perceptivo) ” perceptivamente ejemplificado y el “x es un trazo (permanente) ” metamatemático se aplica asi mismo a la diferencia entre la inexactitud del concepto perceptivo y la exactitud del concepto metamatemático.

Permítaseme decir una vez más que la diferencia entre un concepto que está sustanciado en percepción y el correspondiente concepto metamatemático, que constituye, en términos muy generales, una idealización suya, no es importante para el matemático operante, incluido el metamatemático operante, Pero que es importante para la filosofía de la matemática, esto lo han reconocido no sólo Frege, sino también Platón, Leibniz y Kant. En efecto, Platón distingue estrictamente entre diagramas, por una parte, y las Formas y sus casos, por la otra. Según él, un diagrama, tal como un trazo sobre el papel, no es un caso de la Forma del número 1, sino que “trata solamente de asemejársele” o aproximársele. Entre el trazo perceptivo y el número, la relación no es de sustanciación sino de “participación” o *méthexis* (p¿-&sig) . Ni tampoco identifica Leibniz las cifras de su *characteristica universalis,* que en la medida en que se emplean en matemática expresan “verdades de razón” intemporales, con estas verdades o las universales que son sus elementos constitutivos. Y en forma análoga, Kant distingue cuidadosamente entre enunciados a propósito de objetos físicos o perceptivos, como

bién de la necesidad de justificación, si es que han de identificar trazos materiales o perceptivos, que son im permanentes, con los casos de *“x* es un trazo”, en el sentido en que implica *“x* es permanente”. Resulta instructivo citar aquí un pasaje significativo del cap. i de una impor tante obra reciente:[3] “Digamos de una vez, para evitar malentendidos, que el tema de estas investigaciones no son las realizaciones individuales de las cifras. Asi, por ejemplo, sí las cifras 1, 11, 111, . . . , compuestas solamente con el 1, se designan como 'números*, esto no implica que, cuando las realizaciones percibidas ahora por el lector se hayan acaso descompuesto, no siga habiendo números. En efecto, cualquiera que posea la capacidad de producir tales cifras podrá hablar inteligiblemente, en cualquier momento, de números.”

Cabría señalar, acaso, que las expresiones-trazos se tratan *como si* fueran permanentes. Pero esto significa que los símbolos-trazos escritos en el papel no constituyen la materia' de estudio de la matemática. Significa que *“x* es un símbolo-trazo permanente”, más bien que *“x* es un símbolo-trazo (impermanente) ” es un concepto metamate mático. Poco importa, en efecto, si en ocasión del cálculo o del razonamiento metamatemático ignoramos la diferencia entre los dos conceptos. En cambio, la diferencia es im portante para la filosofía de la matemática. Implica, en efecto, que es falso, hablando estrictamente, que los enun ciados categoriales de la metamatemática sean enunciados perceptivos de certeza indudable. Podrán ser, acaso, de certeza indudable, pero no son, en todo caso, percepti vos. Los trazos en el papel son encarnaciones de “x es un trazo impermanente”.

Otra estipulación que el formalista está obligado a for - mular se refiere al carácter definido o exacto de aquellas expresiones y operaciones de trazos que constituyen la materia de estudio de su ciencia. Estipula, por ejemplo, que toda expresión-trazo, esto es, todo caso de “x es seme jante a 1”, o todo caso de “x es semejante a 11” es per fectamente definida o, lo que viene a ser lo mismo, que

3 P. Lorenzen, *Einführung in die operatiue Logik und Mathematik,* Berlín, 1955.

materia de estudio de la geometría euclidiana. Las dos clases de signos y construcciones son diagramáticas, y los diagramas, por muy útiles y prácticamente indispensables que sean, son "representaciones" que no son ni idénticas ni isomórficas con lo que suelen "representar". En este aspecto, el diagrama es como un mapa, que "representa" un país, o como el hilo de Ariadna, que guía a través del laberinto. No se parece al país o al laberinto mismos. (He puesto el "representar" entre comillas, para indicar que no me sirvo del término en su sentido [tal vez ahora] dominante, que implica isomorfismo entre los sistemas representante y representado. La inexactitud de los conceptos empíricos y la exactitud de los no empíricos excluyen el isomorfismo entre los casos y las relaciones de los dos sistemas.)

Sí admitimos las distinciones precedentes entre los conceptos y las operaciones empíricas y los conceptos y las operaciones no empíricas, entonces habremos de distinguir una ciencia de las expresiones-trazo empíricas de la ciencia de las expresiones y las operaciones-trazo idealizadas. Solamente estas últimas serían —si las cualificaciones relativas a la permanencia y el carácter definido de las expresiones-trazo se toman seriamente— metamatemática. La primera de las dos ciencias podríamos designarla provisionalmente con el nombre bárbaro de "diagramática", para dar a entender que se ocupa de los diagramas perceptivos. La diagramática sirve a la metamatemática en una forma análoga al servicio que presta la cartografía a la exploración geográfica. (Por supuesto, la analogía cesa al considerar que el sujeto de la diagramática son entidades perceptivas y el de la metamatemática son entidades no perceptivas, en tanto que los sujetos de la cartografía y de la exploración geográfica son perceptivos los dos.)

Podemos inclusive desarrollar la analogía un poco más. A menos que hubiera países, no podría haber mapas, puesto que los mapas, inclusive aquellos que no representan país alguno, se definen en términos de la relación entre un dibujo y un país. Y en forma análoga, a menos que hubiera sistemas matemáticos no podría haber formalismo diagramático alguno, porque inclusive aquellos que no formalizan teoría matemática alguna se definen en términos

los signos sobre el papel, y los enunciados a propósito de construcciones en el espacio de la percepción o la intuición pura, distinción que respaldan Brouwer y sus seguidores intuicionistas.

Observamos así, pues, exactamente lo mismo que vimos al examinar la filosofía de la matemática del logicista, una confluencia de dos conceptos diferentes de número. En el caso del logicismo, conceptos empíricos inexactos que pueden sustanciarse en percepción confluyen con conceptos que no pueden serlo: "Número Natural" y "número natural" no se mantienen separados. El logicista pone el acento en los conceptos exactos y *a priori,* los cuales, a su modo de ver, son traducibles en conceptos de lógica. En el caso del formalismo, en cambio, el acento se pone en un concepto presuntamente empírico que se considera a la vez como exacto y descriptivo de datos perceptivos. El hecho de que la exactitud del concepto de número del formalismo se debe a una idealización se pasa por alto o se ignora.

No necesitamos repetir lo que ya señalamos anteriormente a propósito de la diferencia entre los dos tipos de conceptos, sobre todo por cuanto el tema se examinará con mayor detalle más adelante, independientemente de la exposición y la crítica tanto del logicismo como del formalismo. En cambio, si la distinción está justificada en relación con los conceptos de número, ha de admitirse también para el concepto de las operaciones con números. En efecto, del mismo modo que hubimos de distinguir entre la operación matemática de formar la suma de números naturales (no empíricos) y la operación física de añadir Números Naturales (empíricos) , así necesitamos distinguir también entre la operación matemática de adicionar trazos idealizados y la operación física de adicionar trazos materiales, manzanas, piedras u otros objetos perceptivos dados.

Toda vez que los conceptos de la metamatemática y los enunciados en que estos conceptos se aplican no son empíricos, su materia de estudio tampoco es empírica. En efecto, los trazos en el papel y las operaciones con ellos son tan poco la materia de estudio de la metamatemática como las cifras y las construcciones en el papel son la

y han construido cierto número de éstos, con objeto de comunicar sus ideas matemáticas.

Los filósofos formalistas de la matemática están perfectamente percatados del carácter idealizado, no empírico, de algunos conceptos matemáticos y, en particular, de la idea de los infinitos reales. Y sin embargo, no parecen darse cuenta de que la desconexión de la matemática con respecto a la percepción —la introducción de conceptos 110 empíricos— tiene lugar no en la transición de la aritmética elemental a la amplificada, sino en el origen mismo de todo desarrollo de la primera. El concepto mismo de número natural no es empírico.

2] LA EXPLICACIÓN FORMALISTA DE LA MATEMÁTICA APLICADA

Para el logicista, el problema de la matemática aplicada consiste en relacionar enunciados presuntamente lógicos/ que no es posible que sean falsos, con enunciados empíricos que pueden serlo. Para el formalista, el problema consiste en relacionar enunciados perceptivos empíricamente evidentes, que no pueden ser falsos, con enunciados empíricos que sí pueden serlo. Consideramos, lo mismo que anteriormente, la proposición matemática "1 4 - 1 = 2", que describe la yuxtaposición de dos trazos y su resultado, y la proposición de una física muy elemental, "una manzana y una manzana son dos manzanas'* (o sea el caso 36 de la p. 124).

Si consideramos la proposición de las manzanas como resultado de sustituir en la situación descrita por "1 4 - 1 — 2" cada trazo por una manzana y la yuxtaposición de trazos por la yuxtaposición de manzanas, entonces, una de dos: o ambos enunciados serán manifiestamente ciertos, o no lo será ninguno de ellos. Sin embargo, esto es incompatible con el supuesto del que hemos partido. En efecto, sí el enunciado de trazos es manifiestamente cierto y el enunciado de manzanas no lo es, entonces debe haber una diferencia entre los trazos y la yuxtaposición de trazos del matemático por una parte, y las manzanas y la yuxtaposición de manzanas por la otra. La diferencia está, por supuesto, en que los trazos y la yuxtaposición de trazos son casos de conceptos exactos no empíricos, idea-

de la relación de algunos formalismos con algunas teorías. Así, pues, la diferencia entre mapas y no mapas es análoga a la diferencia entre formalismos y no formalismos diagramáticos, y la diferencia entre mapas que representan y no representan países es análoga a la diferencia entre formalismos formalizantes y no formalizantes. No todo pedazo coloreado de papel es un mapa, y no todo mapa representa un país. No todo juego con trazos es un formalismo diagramático, ni todo formalismo diagramático es formalizante. La delimitación por Curry de la noción de formalismo corresponde (aparte de toda interpretación) a la delimitación cartográfica de la noción de mapa (aparte de toda interpretación).

El matemático necesita las figuras diagramáticas como instrumentos, del mismo modo que el explorador geográfico necesita mapas. Sin algún conocimiento de la diagramática, el matemático no puede realizar su tarea de pensar en el marco de una teoría matemática o de inventar otra. Y en forma análoga, sin algún conocimiento de la cartografía un explorador no puede explorar un país que ha sido descubierto o que él descubre por vez primera. La cartografía y la diagramática son, pues, ciencias auxiliares para la exploración geográfica y para la matemática respectivamente. La analogía, especialmente en este caso, de alcance muy limitado, no puede tomar el lugar de la razón. Sin embargo, subraya que la distinción entre los conceptos de número empíricos y no empíricos no implica en modo alguno que la notación, el simbolismo y los formalismos diagramáticos no revistan la mayor importancia, heurísticamente y en.muchos otros aspectos. Su gran importancia nunca ha sido negada, en efecto, por los filósofos que distinguen cutre enunciados acerca de objetos perceptivos y enunciados acerca de objetos matemáticos. Así, según Platón, por ejemplo, el matemático, si bien investiga las relaciones entre Formas eternas, ha de servirse, con todo, por razones prácticas, de diagramas físicos que le ayuden en su investigación. Y los intuícionistas modernos, que niegan que la matemática se ocupe de manipulaciones reglamentadas de signos sobre el papel o de otros objetos perceptivos, están asimismo convencidos de la utilidad y la necesidad práctica de formalismos (diagramáticos)

el concepto "x es un trazo único" sólo admite casos positivos y negativos. Sin duda, podemos decidirnos a operar con "x es una manzana" *como si* no tuviera límite alguno. Pero, en tal caso, deberíamos idealizar el concepto del mismo modo que el metamatemático idealiza el concepto de trazo físico. Y luego deberíamos volver a comparar trazos idealizados con manzanas idealizadas, en tanto que, por supuesto, la cuestión de introducir la noción de una correspondencia biunívoca había de relacionar trazos ideales con manzanas reales, y enunciados físicos acerca de los segundos.

La imposibilidad de establecer la correspondencia biunívoca requerida, de los casos de "x es un trazo (ideal)", o cualquier otro concepto exacto, con los casos de "x es una manzana", o cualquier otro concepto inexacto, se hace más clara todavía si comparamos la situación con una situación puramente aritmética. Llamemos número *P* a un entero (para recordarnos que se trata de casos positivos) si es divisible por 2, pero no por 3, y número N (para recordarnos que se trata de casos negativos) si es divisible por 3, pero no por 2, y designamos un número con *L* (para recordarnos que se trata de casos límite) si es divisible por 2 y por 3 a la vez. Así, pues, un conjunto P-N, que conste de números P y N, corresponde a un concepto exacto, y un conjunto *P-N-L,* compuesto de números P, .V y L, corresponderá a un concepto inexacto. Es obviamente claro que no podemos establecer una correspondencia biunívoca entre *todo* conjunto *P-N-L* y *todo* conjunto *P-N,* en la que los números P del primero estén en correspondencia biunívoca con los números P del segundo, y sin que sobre número alguno del primer conjunto. Hasta aquí, la comparación entre los conjuntos *P-N-L* y P-A' es análoga a la comparación entre conceptos inexactos y exactos.

Sin embargo, el segundo caso es más complejo, como es asimismo más o menos obvio. La razón de ello es sencilla. En efecto, los casos L del conjunto *P-N-L* están estrictamente definidos —es perfectamente claro de cualquier entero dado si es o no divisible por 2 y 3. En cambio, no puede establecerse delimitación alguna tan clara de los casos límite de "x es *una* manzana" o de cualouier otro

lizados, en tanto que las manzanas y la yuxtaposición de manzanas son casos de conceptos empíricos, inexactos. Del mismo modo que hubimos de distinguir entre la "adición" como suma lógica y la "adición" como operación física, así hemos de distinguir entre la "adición" como yuxtaposición matemática y la "adición" como operación física.

La sustitución por el estilo de la que acabamos de describir no puede conducir del enunciado metamatemático al enunciado físico. Tal vez porque esto es muy claramente así, los formalistas no sugieren que los enunciados de la matemática aplicada —y especialmente los de la aritmética elemental aplicada— sean casos de sustitución de enunciados de trazos. Para preservar el carácter evidente de los enunciados de trazos y el carácter no evidente (conjetural, inductivo, probable, corregible, etc.) correspondiente a los enunciados de manzanas, se requiere un análisis más complejo.

La relación se explica a menudo en términos dp una correspondencia biunívoca [4] entre los trazos y las relaciones de trazos por una parte y, por ejemplo, las manzanas y las relaciones de manzanas por la otra. Pero es el caso que semejante correspondencia biunívoca no puede establecerse. En efecto, el concepto metamatemático "x es un trazo" (ya sea *ex hypothesi,* o por decreto de los filósofos formalistas) no admite casos-límite. No es nunca exacto decir de un objeto "esto es un trazo", a menos que sea inexacto decir "esto no es un trazo", sino, por ejemplo, "esto son dos trazos". El caso es muy distinto, por supuesto, con "x es una manzana"* En efecto, las reglas que rigen esta expresión nos permiten decir algunas veces con igual exactitud, de un fruto que crece en un manzano: esto es una manzana, y también esto son},dos manzanas unidas. El fruto en cuestión no está en una relación biunívoca ni con un caso de "x es un trazo único" ni con un caso de "*x* no es un trazo único", sino que constituye un caso límite o neutro de un concepto inexacto que admite casos positivos, negativos *y* neutrales, en tanto que

[4] *P.uordnungsdefinitionen,* definiciones "coordinadoras" o "correlativas", por ejemplo, Reichenbach, *Wahrscheinlichkeitslehre,* Leíden, 1935,pp. 48 *ss.*

conceptos exactos, y las entidades y las operaciones perceptivas, que son casos de conceptos inexactos, parece requerirse una explicación totalmente distinta de la matemática aplicada. En efecto, podemos negar, por una parte, que haya diferencia pronunciada alguna entre los enunciados presuntamente indudables de la metamatemática y los enunciados ordinarios empíricos de la matemática aplicada. Cabría decir, antes bien, que la diferencia es meramente pragmática y consiste en nuestra mayor resistencia en cuanto a desechar los enunciados metamatemáticos del conjunto de nuestras creencias, que en cuanto a descartar las leyes matemáticamente expresadas de la naturaleza. Esta clase de pragmatismo formalista sería análogo al pragmatismo logicista que examinamos en el capítulo 111. Del mismo modo que el pragmatismo logicista sólo admite una diferencia de grado entre los enunciados presuntamente lógicos y los enunciados empíricos, así el pragmatismo formalista sólo admitiría también una diferencia de grado entre enunciados metamatemáticos empíricamente evidentes y los demás enunciados empíricos. Es el caso, sin embargo, que esta clase de pragmatismo formalista estaría en conflicto con las tesis básicas del formalismo original, exactamente igual que el pragmatismo de Quine, por ejemplo, está en conflicto con las tesis básicas de Frege y RusselL

La razón de esto es clara. En efecto, del mismo modo que el logicismo original supone que existe una distinción estricta entre las proposiciones lógicas y las proposiciones empíricas, a la que debe conformarse toda ejecución del programa logicista, así supuso el formalismo original una distinción precisa entre los enunciados metamatemáticos y los extramatemáticos, inclusive si ambos son empíricos. El que nos decidamos a llamar a los pragmatistas logicistas "logicistas" en absoluto, o a los pragmatistas formalistas de la clase descrita "formalistas", esto es en gran parte, por supuesto, una cuestión verbal. Podría parecer, en conjunto, que los filósofos que niegan todas las diferencias excepto las de grado entre las proposiciones lógicas y las no lógicas siguen llamándose, con todo, "logicistas", siendo la razón de ello que algunos de los que han hecho contribuciones importantes a la causa logicista han abrazado al mismo tiempo, o más adelante,

concepto inexacto. Podríamos *tratar,* sin duda, de reunir todos los casos límite entre "x es *una* manzana" y "*x* es un par de manzanas", y llamar el concepto bajo el que caen "*x* es una manzana-gemelo", por ejemplo. Pero es el caso que, a diferencia del conjunto de los números *L,* este concepto admitiría a su vez casos límite, tanto entre "x es *una* manzana" y "x es una manzana-gemelo", como entre "*x es* una manzana-gemelo" y "x es un par de manzanas", *y* la reunión de estos casos límite conduciría a su vez a nuevos casos límite.

Lo que se ha dicho a propósito de la relación entre trazos ideales y manzanas físicas se aplica también, por razones similares, a la relación entre la adición matemática —yuxtaposición ideal de tales trazos— y las diversas operaciones de adición física. El concepto "*x* es el resultado de una yuxtaposición de trazos ideales" no admite casos límite, en tanto que "x es el resultado de una adición física" sí los admite. El contraste entre la adición matemática, tal como la conciben los formalistas, y todas las adiciones materiales es perfectamente tan fundamental como el contraste entre la adición matemática, en su concepción logicista de suma lógica, y las adiciones materiales.

En las filosofías formalistas de la matemática, especialmente en la de Hilbert y Bernays, se reconoce, según vimos, la importancia de distinguir entre los conceptos que se materializan y los que no se materializan en la percepción. Pero estos filósofos trazan la divisoria en otro lugar. Para ellos, en efecto, las totalidades infinitas de expresiones de trazo no pueden materializarse en la percepción, y no tendría sentido buscar, por ejemplo, una infinitud de manzanas. He insistido, por mi parte, en la necesidad de trazar la divisoria mucho antes. Inclusive las nociones elementales de la aritmética —aparte de toda adjunción a las mismas de totalidades infinitas— no se materializan en la percepción. No tiene sentido, por consiguiente, buscar una correspondencia biunívoca aun entre casos de "x es un trazo" (en el sentido definido por los formalistas) y los casos de "*x* es *una* manzana".

Una vez que hemos decidido que no puede haber correspondencia biunívoca alguna entre las entidades y las operaciones de la aritmética elemental, que son casos de

el análisis clásico ha sido sumamente fecundo. Éste es el punto decisivo, y mientras subsista esta utilidad, el análisis clásico no necesita otra justificación de la clase que sea."[6]

Así, pues, Curry insiste, acertadamente a mi parecer, en una distinción precisa entre la matemática pura y la aplicada. Su pragmatismo sólo se extiende a la matemática aplicada y no implica en modo alguno la tesis pragmatista radical de que los enunciados de la matemática pura y los de la aplicada no difieren en naturaleza sino únicamente en grado, según la mayor o menor resistencia con que estamos dispuestos a abandonarlos.

Sin embargo, su pragmatismo con respecto a la matemáticamente aplicada es más bien, si se nos permite la expresión, de grano grueso. La razón de ello está en que deja de analizar la relación entre los predicados formales de la matemática pura y las nociones empíricas de la matemática aplicada. No dice más, en efecto, sino que están "asociadas" y, por implicación, que no son isomorfas. Y efectivamente, si fuéramos a emprender un análisis más preciso de la forma en que las nociones formales y las empíricas están asociadas, nos veríamos en el caso de haber de complementar el análisis a fondo de Curry, de los predicados formales, con un análisis igualmente a fondo de los predicados empíricos. Y esto no lo hace. Ni sostiene tampoco, por otra parte, que sea imposible.

8] EL CONCEPTO DE LA INFINITUD REAL

Frente al empleo del concepto de la infinitud real se han adoptado tres actitudes filosóficas principales, que podemos designar respectivamente como finitísmo, transfinitismo y transfinitismo metodológico. Los finitistas como Aristóteles, Gauss y los antiguos y los nuevos intuicionistas niegan todo contenido "real" o inclusive toda inteligibilidad a las nociones matemáticas que no son características ya sea de agregados finitos o, a lo sumo, de agregados potencialmente infinitos, esto es, de agregados en crecimiento, pero nunca completados. (Aquellos de entre ellos que ni siquiera admiten la idea de agregados potencialmente infi-

o *Op. cit.,* p. 6i,

el pragmatismo. En cambio, los que niegan todas las diferencias, excepto las de grado, entre las proposiciones metamatemáticas y otras proposiciones empíricas no se llaman normalmente formalistas. La razón de esto parece ser, una vez más, que los que han contribuido a la causa formalista —por ejemplo, Hilbert, Bernays y Curry— no han sido al propio tiempo pragmatistas en el sentido radical en que suele emplearse el término.

Ya vimos que los intentos en el sentido de explicar la relación entre "1 + 1 — 2" y "una manzana y una manzana son dos manzanas" considerando este último enunciado ya sea: a] como un caso de sustitución del primero ("manzana", en lugar de trazo, y "adición física", en lugar de "yuxtaposición de trazos"), o b] como isomorfo con el primer extremo en cuanto a ignorar la verdadera diferencia entre los dos enunciados que aquéllos suponen o que, de hecho, se proponen explicar. Un intento mucho más prometedor se debe, según vimos, a Curry.

En efecto, Curry distingue por una parte entre la *verdad* de los enunciados (metamatemáticos) a propósito de signos y series de signos, esto es, la verdad de las proposiciones de la matemática pura, y por otra parte la *aceptabilidad* de una teoría de matemática pura en vista de un objetivo dado. Según él, la verdad de las proposiciones de matemática pura es "una cuestión objetiva a cuyo propósito podemos ponernos de acuerdo", en tanto que la aplicación de una teoría de matemática pura "podrá acaso comprender consideraciones ajenas".[5] Ilustra su distinción comparando un sistema formalizado de análisis clásico con su aplicabilidad en física. El hecho de que los físicos "asocien" a los predicados del análisis clásico determinadas nociones físicas se ha revelado como sumamente fecundo. Constituye un procedimiento pragmáticamente justificable. Un sistema formalizado de análisis clásico, inclusive si es demostrablemente incongruente, ha de preferirse, con todo, a un sistema íormalizado que satisfaga los requisitos finitistas de los filósofos intuicionistas. El punto se destaca en el siguiente pasaje: "Las teorías intuicionistas son tan complicadas que resultan totalmente inútiles, en tanto que

5 *Op. cít.,* p. 6o.

sólo conceden plena "realidad" e "inteligibilidad*' a conceptos empíricos; los realistas metafísicos otorgan este honor también a algunos conceptos no empíricos, y los realistas metodológicos, finalmente, admiten algunos conceptos no empíricos a un título puramente auxiliar. El programa positivista, por ejemplo, lo satisfacen teorías físicas fenomenológícas; el del realismo metafísico, la idea de Boltzmann relativa a la teoría cinética de los gases, y el del realismo metodológico, teorías que sólo admiten entidades inobservables y sus características con las debidas reserva y cualificaciones. Inútil añadir que la noción de lo que constituye un concepto empírico no suele definirse con precisión y varía, de modo confuso, de un grupo de pensadores a otro.

Estas distinciones nos permiten ser breves en la formulación de la filosofía de Hilbert. Se le comprende mejor como un transfinitista metodológico que es también un realista metodológico. En efecto, sólo concede “realidad” a los conceptos empíricos, y considera que los conceptos no-empíricos, como el de "infinitud real", sólo deberían admitirse si puede demostrarse que la teoría que los emplea es congruente.

Ahora bien, he sostenido anteriormente que conceptos empíricos con las características de los trazos físicos y de las operaciones con trazos son inexactos y que los conceptos de la aritmética, incluida la aritmética elemental, son exactos y no-empíricos. Así, pues, la línea que separa a la aritmética finita de la transfinita no es la misma que la que separa los conceptos empíricos y los no-empíricos. En efecto, las aritméticas finita y transfinita quedan las dos del mismo lado no-empírico. Esto significa, además, que el metafísico positivista está también equivocado al combatir la aritmética transfinita so pretexto de que opera con conceptos no-empíricos. De hecho, excluir de la matemática los conceptos no-empíricos equivale precisamente a excluir de la matemática los conceptos matemáticos, o sea, a extinguir el tema.

No cabe duda alguna de que las dificultades en la construcción de una teoría matemática congruente aumentan a medida que vamos de la aritmética elemental a una aritmética que implica el concepto de la totalidad de todos

nitos podrían designarse como "finitistas estrictos",) Los transfinitistas como Cantor y sus discípulos, por su parte, atribuyen la misma realidad e inteligibilidad a los conceptos transfinitos que a los finitos. Y los transfinitistas metodológicos, finalmente, en especial Hilbert, admiten en las teorías matemáticas conceptos transfinitos, pero sin otorgarles condición "ontológica" plena. Admiten estos conceptos porque son útiles para fines como el de la simplificación y la unificación de teorías matemáticas.

Cada una de estas doctrinas filosóficas permanecerá en estado de dogma sin vida de una metafísica autónoma y autosuficiente, a menos que funcione también como principio regulador o directivo, programa que ha de satisfacerse en la construcción de teorías matemáticas. La distinción entre dogma y programa es importante para la comprensión del carácter de las controversias a propósito de la noción de la infinitud real y, de hecho, de muchas otras controversias filosóficas.

El dogma es una proposición que, si tiene sentido en absoluto, es o verdadera o falsa, y de dos dogmas incompatibles, uno cuando menos ha de ser falso. Así, por ejemplo, el finitismo y el transfinitismo han de ser falsos si son enunciados acerca de la naturaleza de la realidad. Sin embargo, resulta difícil decidir en favor de uno u otro, excepto abrazándolo a manera de fe religiosa.

El programa, en cambio, es totalmente distinto. En efecto, no es ni verdadero ni falso. Si dos programas son incompatibles, *no* se sigue de ahí que uno de ellos sea falso. Sino que el programa es susceptible o no de satisfacción, y la persona que adopta uno lo considera (habitualmente) como satisfactible. Pasar por alto la diferencia entre la *satisfacibilidad* de un programa y la *verdad* de una proposición de verdadero-o-falso constituye una confusión. De dos proposiciones de verdadero-o-falso incompatibles, una, cuando menos, ha de ser falsa. Pero dos programas incompatibles, en cambio, pueden ser satisfacibles los dos.

La división entre finitistas, transfinitistas y transfinitistas metodológicos nos recuerda una división más general de la filosofía, esto es, la división entre positivistas, realistas metafísicos y realistas metodológicos. Los positivistas

mente reconocida por los autores mismos es obvio a partir de su prólogo al segundo vólumen, uno de cuyos temas centrales es la situación que hiciera’ necesario "ampliar la estructura de los métodos Concretos *(inhaltliche)* de inferencia admitidos para la teoría de la prueba en oposición a la delimitación anterior del 'punto de vista finito' ".[7] Se admite la inducción transfinita, que procede no a través de la serie de los números naturales, sino a través de conjuntos "más amplios", bien ordenados.[8]

La cuestión que aquí se plantea es la de saber si la admisión de métodos transfinitos de razonamiento en la metamatemátíca no significará acaso abandonar la posición del transfinitismo *metodológico,* o sea la visión que permite conceptos transfinitos *en* las teorías matemáticas y en sus formalizacioncs, pero no los permite en las proposiciones no-formalizadas *acerca* de los formalismos. La situación a la que se enfrenta ahora el formalista, relativa a la distinción entre métodos transfinitos admisibles y no admisibles, es perfectamente similar a la situación a la que, después del descubrimiento de antinomias en el sistema de Frege, se enfrentó el logicista.

El logicismo partía del supuesto de que los conceptos lógicos y las proposiciones lógicas podían distinguirse claramente de las que no lo eran. En el curso del intento consistente en realizar el programa logicista de deducir la matemática de la lógica, la distinción original, que nunca fuera demasiado clara, hubo de borrarse introduciendo en las premisas de las que la matemática se deducía proposiciones no-lógicas o, cuando menos, no obviamente lógicas. Y en forma análoga, el formalismo hizo el supuesto inicial de que existía una distinción clara entre los conceptos y las proposiciones finitos y las demostraciones finitas *(ad oculos),* por una parte, y las transfinitas por otra. En el curso del intento enderezado a realizar el programa de probar la consecuencia lógica de la matemática clásica formalizada por medio de métodos finitos, se hizo necesario admitir también métodos transfinítos.

7 *Op. cit.,* vol. 2, p. vii.

8 Véase, por ejemplo, el cap. v de R. L. Wilder, *Foundations of Mathematíes,* Nueva York, 1952.

los enteros. Y es indudable que estas dificultades aumentan todavía si admitimos agregados de números cardinales mayores que . Habrá que conceder al propio tiempo que cada uno de estos pasos implica un grado mayor de idealización, un alejamiento mayor de la percepción. Sin embargo, éstas no son, en el contexto presente, las consideraciones significativas. Mientras no se probó que el programa del transfinitismo metodológico era insatisfacible, pudo subsistir. Los argumentos en el sentido de que admite idealización en la matemática carecen de fuerza convincente, y los argumentos en el sentido de que admite idealizaciones demasiado radicales poseen muy poca. Si en la realidad histórica un programa no se ha cumplido pese a los mayores esfuerzos de los pensadores más competentes durante un período prolongado, por este hecho solo, más que por cualquier otro, en política, en ciencia, en matemática y en otros campos de la actividad humana, la gente acaba por abandonar o modificar el programa. Y por esto los programas metafísicos y las tesis a las que están asociados, aunque no hayan sido refutados, no mueren de repente, sin que más bien se van desvaneciendo.

Lo que el oponente del programa formalista debería hacer, para ser directamente eficaz, sería demostrar que un programa que admita conceptos transfinitos en teorías matemáticas no podría, dada la naturaleza del caso, satisfacerse.

Ahora bien, en su forma original este programa había de formalizar primero la aritmética elemental y una porción suficiente de la aritmética transfinita, de tal modo que la consecuencia formal del formalismo corrrespondiera a la consecuencia lógica de la teoría formalizada y, en segundo lugar, había de demostrar por *métodos finitos* la consecuencia (formal) del formalismo. Este programa no se puede cumplir, según Godel lo ha demostrado, toda vez que ningún formalismo de la clase aquí empleada puede formalizar la aritmética —ni siquiera la elemental— completamente.

Los resultados de Godel se publicaron en el período comprendido entre la composición del volumen i de la obra clásica de Hilbert y Bernays y la aparición del volumen 11, y el hecho de que su importancia fue clara-

causa de la imposibilidad de demostrar la congruencia lógica de una aritmética completamente formalizada, debe considerarse el intento de afinamiento como fracasado. Sin duda, la explicación de la noción de la infinitud, real, de Hilbert, es superior a su empleo sin clarificación por el logicista, y su intento de una prueba de congruencia es tal vez superior al de Kant, en cuanto es susceptible de procedimientos más definidos. Su fracaso sugiere una modificación del programa original y constituye una fuente de matemática muy fecunda. Pero la condición lógica de la noción de una infinitud real, en cuanto opuesta a la voluntad de algunos y a la vacilación de otros de otorgarle plenos honores metafísicos, permanece, con todo, en la oscuridad, o se deja en la penumbra a la que Kant la había llevado desde la oscuridad.

4] LA CONCEPCIÓN FORMALISTA DE LA LÓGICA

Tradición almen té, la tarea de la lógica se ha concebido como la de proporcionar criterios de corrección para inferencias, poniendo de manifiesto las reglas a las que se conforman las inferencias correctas y son violadas por las incorrectas, o bien caracterizando en forma general —por ejemplo, por medio de enunciados esquemáticos— las proposiciones que enuncian que una proposición se sigue de otra, y sistematizando estas reglas y proposiciones lo más completa y eficazmente posible. Mientras los descubrimientos de los logicistas formales no fueron puestos en tela de juicio, fue posible confiar en una intuición lógica intersubjetiva general en relación con las reglas fundamentales —las llamadas “leyes del pensamiento"— y con los pasos inductivos más simples, en los que pueden resolverse los argumentos complejos.

Fueron principalmente 1] el intento de formular los principios fundamentales del razonamiento matemático, que implicaba la noción de agregados infinitesimales y más adelante infinitos, y 2] el intento logicista más ambicioso de deducir la matemática de la lógica, los que condujeron a una expansión de la lógica por medio de principios cuya verdad no podía seguir basándose simplemente en un llamado a la intuición lógica, sobre todo por cuanto

En el caso del formalismo, el intento de cumplir el programa original falla no sólo en cuanto que el programa no se ha cumplido (lo que constituye el hecho histórico), sino que el fracaso consiste en que se ha demostrado que no se podía cumplir. Sin duda, muchos resultados de importancia variable se han reunido en el curso del trayecto, pero, por lo que se refiere a las tesis y los programas específicamente filosóficos del formalismo original, éstos han debido completarse con cualificaciones *ad hoc.*

En conclusión, hemos de preguntar qué luz la filosofía formalista de la matemática ha proyectado sobre la noción conjunta de la infinitud real. Hilbert, según vimos, consideraba esta noción como una Idea kantiana, esto es, como una noción que ni se deja extraer de la percepción ni es aplicable a ella y que, sin embargo, puede introducirse en teorías sin incongruencia. Emprendió la tarea de dar a la vez un análisis más preciso de su Idea y una prueba rigurosa de su inocuidad en los sistemas formalizables del análisis clásico. Por una parte, la Idea de una infinitud real y las proposiciones que la implican son, según Hilbert, exactamente iguales a los conceptos y proposiciones matemáticos finitos, y a los enunciados que las implican, en cuanto son susceptibles de incorporación —sin el significado que puedan acaso tener o no tener— en un formalismo completo y congruente. Por otra parte, la Idea y las proposiciones que la implican no son susceptibles, *a diferencia* de los conceptos y proposiciones matemáticos finitos, de interpretarse como caracterizaciones de características perceptivas de datos perceptivos muy simples. En el caso de los objetos del formalismo que encarnan nociones y proposiciones finitas, las reglas de manipular estos objetos *qua* objetos pueden completarse por otras reglas que, junto con las primeras, rijan el empleo de los objetos como características perceptivas y proposiciones perceptivas. En el caso, en cambio, de objetos que no encarnan conceptos o proposiciones finitos, esto no puede hacerse.'

El intento emprendido por Hilbert de afinar la explicación kantiana de las Ideas, y en particular de la infinitud real, consiste en introducir las nociones de formalízacíón completa y de prueba de la congruencia formal. A

ciones constructivas no puedan ser también seguras con fundamento en otras razones, tal vez puramente lógicas. Es el caso, sin embargo, que los formalistas, cuando menos de acuerdo con el programa original, sólo se basan en pruebas constructivas.

Desde el punto de vista de una filosofía de la matemática, las relaciones entre una inferencia y su verificación constructiva en relación con su validez requieren cierto esclarecimiento. Conviene observar, ante todo, que la construcción mediante la cual puedan verificarse inferencias podrá ser acaso una construcción de hecho o una construcción "solamente de principio". Una verificación constructiva que implique la construcción de un entero aproximidad de $10^{10^{10^{10}}}$ sólo es posible en principio. Pero, inclusive si nada nos impide una construcción, excepto el hecho de que no tenemos medios de llevarla efectivamente a cabo, aun así la inferencia no está respaldada por la construcción.

La situación epistemológica nos recuerda un caso similar, esto es, la distinción entre proposiciones verificables de hecho y proposiciones solamente verificables en principio. En este caso, la dificultad fue combatida desarrollando un punto de vista epistemológico acerca de la relación entre una ley general y su verificación en la percepción, que se adaptaba a casos de verificación real y se extendía verbalmente a otros casos, señalando la frase "en principio", que no se había aclarado, más un problema epistemológico, en el mejor de los casos, que su solución.

Pero inclusive allí donde una construcción respalda *de hecho* una inferencia, la relación tampoco es totalmente clara. Consideremos nuevamente la proposición respaldada constructivamente "cuando se yuxtaponen una cifra < 1 > y otra cifra < 1 >, se produce la cifra < 1 1 >". Este enunciado se considera como evidentemente cierto. ¿Cuál es el carácter de esta presunta autoevidencia no lógica? Supongamos que alguien objeta la proposición y sostiene que ha yuxtapuesto < 1 > y < 1 > y no ha obtenido < I I >.

La respuesta del formalista sería que el objetor no había hecho lo que se proponía hacer; en otros términos,

la lógica ampliada conducía por sus propios principios a contradicción. El fracaso aparente de derivar la matemática de la lógica condujo a los pensadores a basarse —como lo había hecho Kant— en aquellas intuiciones que estaban respaldadas por la materia de estudio particular de la construcción matemática.

Para el formalista, el problema no está en ampliar la lógica hasta donde sea necesario para deducir de ella la matemática, sino en extraer solamente de la lógica conjunta lo que se necesita para razonar a propósito de los formalismos. El formalista sólo se ocupa de lo que Hilbert llama "consideraciones en forma de *experimentos de pensamiento* sobre objetos que pueden considerarse como dados concretamente",® o lo que Curry designa, según lo hemos mencionado reiteradamente, demostraciones *ad oculos.* En tanto que el logicista ha de ampliar la lógica tradicional para sus fines, los formalistas, en cambio, contrajeron en algunos aspectos la lógica *en la que* se permitían a sí mismos razonar. En efecto, Curry no considera que sus demostraciones *ad oculos* formen parte de la lógica, sino que considera la matemática como completamente autosuficiente. Por otra parte, la expresión "experimento de pensamiento", tal como la emplea Hilbert, parece también implicar que, en matemática, más bien observamos el resultado de lo que estamos haciendo cuando manipulamos objetos de acuerdo con ciertas reglas, y no que extraemos meramente conclusiones de unos enunciados a otros.

Lo que desde este punto de vista confiere seguridad a una inferencia no es un principio de lógica —una verdad leibniziana de razón que fuera verdad en todo mundo posible—, sino la posibilidad de averiguar si las premisas implican o no la conclusión, mostrando si al producir el estado de cosas descrito por las premisas estamos o no produciendo *ipso facto* el estado de cosas descrito por la conclusión. Desde este punto de vista, "1 + 1 = 2" es necesariamente verdad, porque, al producir la yuxtaposición de < 1 > y < 1 >, producimos < 11 >. No se sugiere con ello que las inferencias susceptibles de verifica-

® *Op. cit.,* vol. 1, p. so.

debe poseer *D”,* en donde la cuestión acerca de si la posesión de *C* por una construcción implica o no lógicamente la posesión de *D* versa sobre la validez de una deducción complicada de "*x* posee C” a “x posee O”, empleando ciertos principios admisibles de inferencia. (Las llamadas pruebas constructivas son en conjunto más complejas, y no menos, que las no constructivas.)

Luego la situación es la siguiente: *Prima facie,* el formalista no se basa en principios lógicos, sino meramente en enunciados como los de “una construcción dada de objetos perceptivos con característica perceptiva *C* posee *ipso fado* las características *D”.* A esto hay que añadir la cualificación de que la construcción ha de ser correcta. Pero, es el caso que la proposición de que una construcción es correcta, esto es, de que es conforme a una regla adoptada, ya no es perceptiva, sino que contiene una implicación lógica o una inferencia cuya validez depende de principios lógicos. Y estos principios han de adoptarse antes de que podamos decidir acerca de la corrección de una construcción.

Al deducir enunciados acerca de construcciones a partir de otros enunciados tales, empleamos menos principios lógicos que en la matemática clásica. Pero es el caso que estos principios, si bien están sugeridos por construcciones —por ejemplo, de trazos y expresiones-trazos—, no son juicios perceptivos. Únicamente si fuéramos a suponer que el medio en que efectuamos nuestras construcciones es d; una clase especial, de modo que pueden describirse inmt diatamente mediante proposiciones generales y necesarias, sin plantear la cuestión acerca de si una determinada construcción es o no correcta, podríamos prescindir de los principios lógicos. Los intuicionistas se dan cuenta del hecho de que la percepción ordinaria no es el medio para tales construcciones y pretenden, por consiguiente, que los principios del razonamiento no están validados en matemática por construcciones en la percepción ordinaria, sino en una intuición *sui generis.*

La lógica formalista es una *lógica* mínima o, mejor dicho, la lógica mínima que se necesita para el razonamiento metamatemático. *No es* un sistema de proposiciones que describe características perceptivas de diversas construccio-

que su yuxtaposición de trazos no se había hecho *correctamente.* Pero la corrección de una ejecución no figura entre sus características perceptivas, ni puede hacerlo, porque es una relación entre una ejecución y una regla adoptada, relación que queda más plenamente expresada por el enunciado de que la ejecución es conforme a la regla adoptada. El encontrar si una construcción es correcta, o es conforme a una regla adoptada, va más allá de observar lo que ha sido —lo que *acontece* haber sido— construido, e introduce principios lógicos y un discurrir lógico, los cuales, si bien respaldados por la construcción, no obtienen su validez de ésta.

Supóngase que hemos adoptado una regla *r* que rige las construcciones (las cuales, pues, son correctas si son conformes a r e incorrectas si la vulneran) , y que afirmamos de una determinada construcción *c,* que posee la característica *C,* que es conforme a *r porque* posee *C.* Hacer esta afirmación equivale, entre otros, a enunciar o implicar que si *cualquier* construcción *x* poseyera *C* sería necesariamente conforme a *r.* Este enunciado es un enunciado de necesidad lógica y podría escribirse esquemáticamente como: "La construcción *x* posee C" implica lógicamente "la construcción *c* es conforme a *r*ᵘ . Si bien es hipotético y general, este enunciado no es ciertamente perceptivo, con todo, y su autoevidencia, si acaso tiene alguna, tampoco puede ser perceptiva. No constituye un caso de "ver es creer", porque las conexiones hipotéticas generales, y especialmente las implicaciones lógicas, no se perciben.

Cabría objetar que si bien " 'la construcción *x* posee C[f] implica lógicamente 'la construcción *x* es conforme a r' " no es perceptiva, es siempre inmediatamente evidente, con todo, y que la distinción entre construcciones, simplemente, y construcciones correctas, que introduce el enunciado de la implicación lógica, reviste, por consiguiente, poca importancia. Pero es el caso que esto dista de ser cierto. En efecto, hay implicaciones lógicas banales, por ejemplo: "la construcción *x* posee C'' implica lógicamente "la construcción *x* es conforme a *r,* que prescribe que *x* debe poseer C". Pero hay otras que no son banales, por ejemplo: "la construcción *x* posee C" implica lógicamente "la construcción *x* es conforme a r, que prescribe que *x*

CAPÍTULO SEXTO

LA MATEMÁTICA COMO LA ACTIVIDAD DE CONSTRUCCIONES INTUITIVAS: EXPOSICIÓN

Constituye una de las convicciones fundamentales de la escuela intuicionista, cuya doctrina es objeto del presente capítulo, el que la matemática, si se la comprende y practica apropiadamente, forma una actividad totalmente autónoma y autosuficiente. Se considera que sus métodos e intuiciones ni son susceptibles de las garantías que los logicistas y los formalistas profesan proporcionar cada uno por su cuenta, ni las necesitan. Según los intuicionistas la impresión de que la matemática necesita el apoyo de una lógica extendida o de una formalización rigurosa sólo ha surgido allí donde no se la ha tratado apropiadamente.

El logicismo y el formalismo han tratado las antinomias de la matemática clásica como una enfermedad susceptible de una cura que dejaría a éstas sustancialmente intactas. Los intuicionistas, en cambio, consideran las antinomias meramente como un síntoma de que la matemática no ha sido en muchas de sus ramas fiel a sí misma. El logicismo y el formalismo trataron de reconstruir el edificio o de asegurar sus cimientos de tal modo que la obra matemática pudiera seguir en los pisos superiores sin mucha dificultad. Los intuicionistas, por su parte, tratan de construir una nueva matemática en todos los niveles, con lo que consideran como los verdaderos métodos matemáticos.

Tanto los formalistas como los intuicionistas, y en particular sus jefes modernos, Hilbert y Brouwer, reconocen, según vimos, la influencia de la filosofía de la matemática de Kant y repudian la tradición leibniziana, según la cual todas las proposiciones matemáticas son analíticas en el sentido de que su verdad puede demostrarse con sólo una aplicación de los principios de la lógica. Tanto

nes. Esta conclusión es independiente del punto en el que insistimos anteriormente de que los conceptos matemáticos, por ser exactos, difieren de las características perceptivas, que son inexactas o admiten casos límite.

de la metamatemática y los datos introspectivos de la matemática intuicionista, estos datos tienen, con todo, mucho en común. La característica común más importante es que una totalidad infinita completa no puede ni percibirse ni contemplarse introspectivamente. En otros términos: ni la metamatemática ni la matemática intuicionista pueden admitir proposiciones acerca de infinitudes reales, pudiendo admitirlas sólo acerca de infinitudes potenciales.

En vista de una mejor comprensión del intuicionismo vale la pena preguntar si reconduciría o no a la matemática formalista si fuéramos a ignorar la diferencia de los sustratos, reales o presuntos, entre las dos actividades. Como cabría esperarlo, los dos se servirían en conjunto de los mismos métodos finitos, esto es, métodos como los que describimos anteriormente en nuestra exposición del formalismo. Sin embargo, el formalista no los utilizaría más allá del punto en que, habiendo establecido la coherencia de un sistema formal, podría empezar a servirse de él. Para el intuicionista, en cambio, toda vez que no puede encontrar o esperar encontrar refugio en un sistema formal, el incentivo de servirse de métodos finitos, a pesar de la complejidad y dificultad crecientes, es mucho mayor. La matemática intuicionista finitista ha sido efectivamente desarrollada mucho más allá que la metamatemática finitista.

En el primer capítulo de *Intuitionism-An Inlroduction*[2] de Heyting, se encuentra una discusión en la que uno de los disputantes, llamado "Int", se dirige a otro, llamado "Form", en los siguientes términos: ". . .te sirves también del razonamiento lógico en lo que Hilbert ha llamado metamatemática, pero tu propósito está en separar estos razonamientos de la matemática puramente formal, y en confinarte a los razonamientos más simples posibles. Yo, en cambio, no me intereso por el lado formal de la matemática, sino exactamente por aquel tipo de razonamiento que aparece en la matemática, ai que trato de desarrollar hasta sus consecuencias más lejanas. Esta preferencia proviene de la convicción de que encontramos en aquél una de las facultades más fundamentales de la mente humana."

2 Amsterdam, 1956.

Brouwer como Hilbert consideran las teorías matemáticas como sintéticas, en un sentido del vocablo que se basa en una clasificación mutuamente exclusiva y conjuntamente exhaustiva de las proposicionés en analíticas y sintéticas.

Sin embargo, la concepción de Brouwer del carácter sintético de la matemática es muy distinta de la de Hilbert y más cercana a la de Kant. Se recordará que, según Kant, los axiomas y teoremas de la aritmética y la geometría son sintéticos *a priori,* esto es, son descriptivos de la pura intuición de espacio y tiempo y de las construcciones en ella. Brouwer acepta sin reservas la doctrina de Kant de la pura intuición del tiempo —aparte de todo contenido perceptivo— y la considera como el sustrato de la matemática. Lo mismo que Kant, considera esta intuición como independiente de la percepción sensible, incluyendo en la percepción sensible en particular la percepción de símbolos y operaciones con símbolos tales, como los trazos y las operaciones de trazos de Hilbert, los cuales, junto con otros signos y operaciones, constituyen la materia de estudio de la matemática formalista.

La materia de estudio de la metamatemática son objetos y construcciones *perceptivas* de estructura tan simple y transparente que podemos estar ciertos de la verdad de los juicios empíricos sintéticos que los describen. Y la materia de estudio de la matemática intuicionista, por otra parte, son objetos y construcciones no perceptivos intuidos, que son autoevidentes introspectivamente. En efecto, Brouwer no apela ciertamente a la inspección de objetos externos, sino a la "introspección directa".[1] La distinción entre construcciones perceptivas e intuitivas reviste cierta importancia filosófica, toda vez que podemos sostener de modo más plausible que las últimas se dejan aprehender como universales y necesarias sin la aplicación de la noción de exactitud y, por consiguiente, sin el empleo de principios lógicos. (Este punto se examinó al final del capítulo anterior.)

Pese a las diferencias entre los datos inspeccionables

i Véase, por ejemplo, "Historical Background, Principies and Methods of Intuitionism", en *South African Journal of Science,* octubre-noviembre de 1952, p. 142 nota.

se también como "intuiciones", término del que Brouwer se sirve con frecuencia. Es preferible citar aquí *verbatim e in extenso* su trabajo.[4]

"El *primer acto del intuicionismo* separa por completo la matemática del lenguaje matemático, en particular de los fenómenos del lenguaje que describe la lógica teórica, y reconoce que la matemática intuicionista es esencialmente una actividad sin lenguaje de la mente, que tiene su origen en la percepción de un *movimiento del tiempo,* esto es, de la separación de un momento de la vida en dos cosas distintas, una de las cuales cede el paso a la otra, pero es retenida por la memoria. Si la dualidad así originada se despoja de toda cualidad, queda la *forma vacia del sustrato común de todas las dualidades.* Este sustrato común, esta forma vacía, constituye la *intuición básica de la matemática."*

La doctrina de este pasaje y de otros similares de los escritos de Brouwer es, sustancialmente, la de *La critica de la razón pura,* siendo la principal diferencia que, según Brouwer, la intuición kantiana del espacio y las construcciones (euclidianas) en el mismo no forman parte de la intuición que sirve de base a la matemática (véase cap. i) . La matemática presupone, según Kant y Brouwer, una intuición que es distinta, por una parte, de la percepción sensible, de la que es la forma invariante, y de la aprehensión, por otra parte, de conexiones lógicas entre conceptos o proposiciones. Del mismo modo que la experiencia de trepar a lo alto de un monte, por ejemplo, no debe confundirse con su descripción y su comunicación lingüística a otros, así tampoco debe confundirse la experiencia de las intuiciones y las construcciones matemáticas con su descripción y comunicación lingüísticas (pese a que esta formulación lingüística pueda ser de mucha ayuda para el montañista o el matemático y para aquellos que deseen seguir su ejemplo) .

De la misma manera que el trepar no depende del lenguaje, la actividad matemática, con sus penetraciones y construcciones intuitivas, carece de lenguaje. Según Brouwer, los principios de la lógica clásica son reglas en

4 *Op. cit.*

Para una breve exposición del intuicionismo convendrá explicar primero su concepción de la matemática pura y el programa basado en esta concepción, dando luego algunos ejemplos del método intuicionista en función y, especialmente, de su manera de tratar la noción de la infinitud potencial. En cuanto al problema de la matemática aplicada, los intuicionistas han mostrado aun menos interés en ella que los logicistas y los formalistas.

1] EL PROGRAMA

En uno de sus trabajos ingleses más recientes,[3] Brouwer describe la situación de la filosofía de la matemática tal como la han formulado los antiguos y los nuevos formalistas y preintuicionistas, según llama a aquellos pensadores que en algunos aspectos se le anticiparon, especialmente a Poincaré, Borel y Lebesgue.

Tal como se presentaba para el propio Brouwer, la situación era ésta: la matemática, tal como la practicaban los preintuicionistas y los formalistas, constaba de dos partes separadas, esto es: de una matemática autónoma y de una matemática que dependía para su crédito del lenguaje y la lógica. Por lo que se refiere a la matemática autónoma, "la existencia exacta, la seguridad absoluta y la ausencia de contradicción estaban universalmente reconocidas, independientemente del lenguaje y sin prueba". Abarcaban "la teoría elemental de los números naturales, el principio de la inducción completa, y partes más o menos considerables del álgebra y de la teoría de los números". La matemática no autónoma, en cambió, comprendía la teoría del continuo de los números reales. Para ésta faltaba y, según se convenía en forma más o menos general, se necesitaba una prueba de existencia no contradictoria.

Las tesis fundamentales de la filosofía intuicionista de la matemática están claramente formuladas por Brouwer. Éste las describe como "dos actos" mediante los cuales el intuicionismo "intervino" en la situación creada por sus predecesores y los formalistas. Estos actos podrían designar-

3 *op. cit.*

ta en forma *afirmativa* (si se tiene en cuenta el carácter inevitablemente inadecuado del lenguaje cual modo de expresión), en la medida en que se tráte de los principios, de contradicción y silogismo; pero en forma *negativa,* en cambio, en relación con el principio de tercero excluido (excepto en casos especiales), de modo que este último ha de descartarse, en consecuencia, como instrumento para descubrir nuevas verdades matemáticas.''

Consideraremos dentro de breves momentos algunas construcciones matemáticas cuyo examen condujo a Brouwer y a sus discípulos a abandonar la ley del tercero excluido y algunos otros principios del razonar para conjuntos infinitos de objetos. Este mismo rechazo lo hemos encontrado en la limitación original de la matemática concreta por los formalistas, quienes, sin embargo, admiten la aplicación *formal* de estos principios dentro de las teorías formalizadas de la matemática clásica. Esta forma de salvar la matemática clásica le está cerrada al intuicionista, toda vez que está en conflicto con su concepción de la matemática como una construcción sin lenguaje.

La limitación de la matemática a los métodos finitos de la metamatemática formalista —se apliquen éstos a objetos de percepción ordinaria o de intuición— representaría un golpe paralizador contra la estructura de la matemática clásica. Sin embargo, y ésta es la segunda penetración del intuicionismo, hay una matemática del infinito potencial que, evitando la noción perceptiva e intuitivamente vacía de totalidades infinitas preexistentes actuales, constituye la fundamentación intuitiva firme de un nuevo análisis y abre un nuevo campo de desarrollo que "en algunos lugares trasciende con mucho las fronteras de la matemática clásica. . ."

Este campo de una nueva matemática autónoma del infinito potencial lo abre "*el segundo acto del intuicionismo,* que reconoce la posibilidad de engendrar nuevas entidades matemáticas: primero, en forma de *series de extensión infinita* p_1, p_2, . . . cuyos términos se *han escogido más o menos libremente con respecto a entidades matemáticas previamente adquiridas,* de tal modo que la libertad de elección existente tal vez para el primer elemento p_1 pueda acaso estar sujeta a una restricción permanente en

cuanto que aquellos que las "siguen lingüísticamente" podrán acaso "ser guiados por la experiencia", pero no necesitan serlo. Esto significa que las reglas de la lógica clásica se emplean en la descripción y la comunicación, pero no en la actividad misma de construir, como tampoco se emplean, excepto en cuanto auxiliares sin importancia, en la actividad de trepar a lo alto de una montaña. En este sentido, la matemática es esencialmente independiente no sólo del lenguaje, sino también de la lógica.

Así, pues, según Brouwer hemos de distinguir estrictamente entre dos actividades distintas, a saber: por una parte, la construcción matemática, y por otra parte la actividad lingüística, esto es, todas las proposiciones de los resultados de la construcción y toda aplicación a estas proposiciones de los principios lógicos del razonar. En vista de la diferencia fundamental entre las dos, tiene sentido preguntar si la representación lógico-lingüística es siempre adecuada o no a la construcción y, en particular, si la representación va o no más allá de la construcción. El hecho de que el lenguaje desborde en ocasiones la materia de estudio es un fenómeno familiar. Por lo regular, el peligro de que lo haga se ha considerado como muy grande en el caso del lenguaje filosófico y como muy pequeño en matemática. Pero, según Brouwer, el peligro es grande también en ésta. Así, por ejemplo, en el caso de todos los matemáticos que se sirven de la ley del tercero excluido al razonar a propósito de sistemas infinitos de objetos matemáticos, el lenguaje desborda y deforma la realidad matemática.

Conviene una vez más citar aquí *verbatim* una parte de la propia clara formulación de Brouwer: "Supongamos que una construcción matemática intuicionista se ha descrito cuidadosamente por medio de palabras y que luego, ignorando por un momento el carácter introspectivo de la construcción matemática, se considera su descripción lingüística por sí misma y se somete a una aplicación lingüística de un principio de la lógica clásica. ¿Resulta siempre posible, en tal caso, realizar una construcción matemática sin lenguaje que encuentre su expresión en la figura lógico-lingüística en cuestión?

"Después de un examen atento, contestamos la pregun-

sea mediante lógica o formalización. Porque éstas son legitimas en si mismas, son autovalidantes.

2] LA MATEMÁTICA INTUICIONISTA

Para el intuicionista, la matemática es la construcción de entidades en la pura intuición, y no la promesa de semejante construcción o la encuesta acerca de si ésta es o no posible.

El matemático clásico, el logicista y el formalista aceptan como legítimos enunciados en el sentido de que "existe" un número revestido de determinadas propiedades, pese a que hasta el presente no se conozca método alguno para construirlo. Tales enunciados —puros teoremas de existencia— no los admite el intuicionista en su matemática. No se inquieta, por consiguiente, si a alguien le parece raro que un teorema matemático demostrativo de la constructibilidad actual de algún número sólo se haga cierto después de haber sido probado (por §us medios) . En efecto, no hay en esto rareza alguna para él, ni debiera haberla para quienquiera que comprenda la posición intuicionista, para la cual "existencia matemática" significa lo mismo que "constructibilidad real". Qué sea lo que deba considerarse como constructibilidad real, esto nunca se define de modo preciso en términos generales, pero se aclara —así lo afirma el intuicionista— en la práctica.

Al explicar algunas de las ideas elementales de la matemática intuicionista —que es lo único que aquí puede intentarse—, seguiré de cerca la exposición de Heyting en su *Intuitionism-An Introductíon,* Heyting conduce a su lector mucho más lejos, explicando el tratamiento intuicionista de algunos aspectos de la matemática avanzada, como las teorías de los campos algebraicos y la teoría de la medida e integración.

Así, pues, la matemática intuicionista parte de la noción de una entidad abstracta y de la sucesión de tales entidades. Empieza, en otras palabras, con la sucesión natural de los números. No hay necesidad alguna de formular un sistema deductivo de la aritmética elemental, ya que semejante formulación sólo sería adecuada si formulara lo que es evidente por sí mismo, sin ella. En efecto, no

algún p_r siguiente, así como, una y otra vez, a restricciones permanentes más precisas o inclusive a la abolición en algún otro p_r más lejano, en tanto que estas intervenciones restrictivas, lo mismo que la elección de las p_r mismas, podrán hacerse depender en cualquier momento de experiencias matemáticas futuras del sujeto creador; y segundo, en forma de especies matemáticas, esto es, de *propiedades presumibles en relación con entidades matemáticas previamente adquiridas,* que satisfagan la condición de que, si son ciertas en relación con una determinada entidad matemática, lo sean asimismo en relación con todas las entidades matemáticas que se han definido como iguales a aquélla, debiendo ser las relaciones de igualdad simétricas, reflexivas y transitivas; las entidades matemáticas de adquisición previa para las que la propiedad resulta cierta se designan como elementos de la especie".

Según veremos con mayor detalle, la matemática intuicionista- difiere grandemente de la clásica, sea que se practiquen "infantilmente", estén o no soportadas por una estructura logicista o estén garantizadas por la formalización. Su programa está formulado de modo suficientemente simple, inclusive si su ejecución implica procedimientos y conceptos difíciles o, cuando menos, muy poco familiares, y aun si el carácter de la construcción intuicionista pueda ser claro *prima facie* para el no intuicionista. Tiene por objeto efectuar construcciones matemáticas en el medio de la intuición pura y comunicarlas luego a otros, lo más claramente posible, de modo que puedan repetirlas.

No toda construcción matemática reviste el mismo interés y la misma importancia. Sin embargo, no existe nunca mucha duda acerca de cuáles construcciones sean importantes, toda vez que los motivos para encontrar construcciones surgen, como en la matemática no intuicionista, de la curiosidad de los matemáticos puros y de las necesidades de aquellos que emplean la matemática para otros fines. El programa del intuicionista consiste en practicar la matemática intuicionista, esto es, en crear o construir objetos matemáticos, toda vez que solamente los objetos construidos tienen existencia matemática. No tiene por objeto, en cambio, mostrar la legitimidad de tales construcciones, ya

2/1000. Consideremos ahora otra sucesión -{&«}> definida como sigue: si el n-ésimo dígito después del punto decimal en la ampliación decimal de π = 3.1415 . . . es el 9 de la primera sucesión 0123456789 en esta ampliación, b_n — 1; en todo otro caso, b_n ~ 2/n — a_n.

Toda vez que la sucesión •{£„}■ difiere de la -¡a_n }- en un término a lo sumo, se trata de una sucesión de Cauchy en el sentido clásico. Pero, toda vez que no conóceme» construcción alguna que muestre si el término crítico ocurre o no en b_n }- —si una sucesión 0123456789 ocurre o no en jt—, no tenemos el derecho de afirmar que •¡5_n |- es una sucesión de Cauchy en el sentido intuicionista. La sucesión intuicionista de Cauchy, que ha de ser construí ble lo mismo que $\{a_n\}$, se designa también como "generador de número (real)". Es obvio que el intuicionista no puede admitir en su matemática la idea de todos los generadores numéricos, inclusive si pudiera demostrarse que no conduce a incoherencia alguna en un sistema formal dado.

La identificación de la existencia con la constructibilidad real de generadores numéricos ha de conducir a una modificación profunda de la noción clásica de la igualdad y la diferencia de dos números reales. Heyting define dos relaciones de igualdad entre generadores de números reales, a saber: "identidad" y (la relación más importante de) "coincidencia". Dos generadores de números «ja_n J- y -{5_n }> son idénticos —en símbolos $a = b$— si para cada n, a_n — b_n. Coinciden, en cambio —en símbolos $a \sim b$—, si para cada k podemos encontrar un entero n —$n(k)$ tal, que |« „+p -í>„ +fJ |<] / A Para cada A

El hecho de que no podamos encontrar la coincidencia requerida n — $n(k)$ para todo k no nos autoriza a decir que a y b no coinciden, porque la negación intuicionista, lo mismo que la afirmación intuicionista, ha de basarse en una construcción, y no en la ausencia de ella. Únicamente si $a = b$ es contradictorio, esto es, *"únicamente si podemos efectuar una construcción que deduzca una contradicción del supuesto a ~ b"*, estamos autorizados a afirmar que a y b no coinciden, esto es, $a \neq b$.

Cabría pensar que el probar a su vez que $a \neq b$ es contradictorio (imposible) constituye *ipso fado* una prueba dé a — b. Y efectivamente, es un teorema de la mate-

confiere ni evidencia inmediata ni seguridad. En el mejor dejos casos, sólo las refleja lingüísticamente. Para el intuicionista, los axiomas de Peano (véase apéndice A) no hacen más que formular resultados directamente evidentes del proceso de engendrar los números naturales.

La diferencia entre la matemática clásica (tanto en su forma "ingenua" como en su forma logicizada o formalizada) y la intuicionista se pone de manifiesto muy claramente cuando se llega a definir los números reales. En efecto, en matemática clásica la noción de número real puede definirse en términos de una llamada sucesión de Cauchy de números racionales. La sucesión de Cauchy clásica se define como sigue: a_1, a_2, a_3......... o bien, brevemente $\{a_n\}$ o *a, en* donde todo término es un número racional, es una sucesión de Cauchy si para todo número natural *k* (y, por consiguiente, para toda fracción $1/k$, por pequeña que sea) *existe* un número natural $n = n(k)$ tal que para todo número natural *p*, $|a_{n+p} - a_n| < 1/k$.

En términos generales, esto significa que si consideramos cualquiera fracción $1/k$, *existe* siempre un término tal, el n-ésimo por ejemplo, que, al sustraerlo de cualquiera de sus sucesores, el valor absoluto de la diferencia es menor que $1/k$. (El valor absoluto de un número no negativo es este número mismo, y el valor absoluto de un número negativo es el número que resulta de cambiar su signo menos por un signo más.) Así, pues, el valor absoluto de la diferencia de pares de números racionales se hace más pequeña a medida que los escogemos de números "posteriores" en la sucesión.

La definición de la noción de una sucesión de Cauchy intuicionista puede formularse casi con las mismas palabras. La única diferencia consiste en sustituir la frase "existe" por la frase *"puede encontrarse efectivamente"* o "puede construirse efectivamente". Vale la pena fijarse en la diferencia de significado entre estas dos frases, toda vez que conduce al meollo de la matemática intuicionista.

Heyting la destaca por medio del siguiente ejemplo. Consideremos las siguientes definiciones de sucesiones clásicas de Cauchy. La primera sucesión $\{a_n\}$ es: 2/1, 2/2, 2/3, . . . o $\{2/n\}$. En esta sucesión, cada componente puede construirse efectivamente, esto es, el milésimo miembro es

que distingue entre no coincidencia y carácter aparte, en esta forma, le parecerá innecesariamente complicada y pro lija. Pero esta prolijidad podrá deberse a mera falta de familiaridad. En efecto, del mismo modo que en filosofía escritores aparentemente lúcidos son en ocasiones pensado res confusos, así también los matemáticos clásicos podrán ser acaso, pese a su aparente lucidez, fundamentalmente poco claros. De hecho, no se ha encontrado hasta el pre sente antinomia alguna en la matemática intuicionista.

Las operaciones con generadores de números reales pue den explicarse de modo perfectamente directo. Pero debe observarse que un generador de número real no es un nú mero real. En matemática clásica, después de haber defi nido un cierto generador numérico, cabría proceder a definir un número real correspondiente como *"el conjunto de todos* los generadores numéricos que coinciden con el generador numérico dado" Sin embargo, la frase "el con junto de todos. . ." no se refiere aquí a una entidad cons- truible y se le ha de dar un nuevo contenido intuicionis ta. En efecto, a la noción clásica de conjunto corresponden dos nociones intuicionistas, la de una dispersión y la de una especie —definiéndose la dispersión como un modo co mún de engendrar sus elementos (construibles) , y la es pecie como una propiedad característica que puede atri buirse a entidades matemáticas que han sido construidas, o pudieron haberlo sido, *antes* de definir la especie.

Al definir una dispersión, el primer paso consiste en concebir una noción verdaderamente general de una *suce sión injinit ámente proseguida,* esto es, una sucesión que puede proseguirse *ad infinitum,* cualquiera que sea la ma nera como los componentes de la sucesión se determinen, ya sea por ley, por elección libre o en la forma que se quiera. De tales series, las sucesiones de Cauchy descritas más arriba, o generadores numéricos, son casos particulares. Su intuición y la penetración que revela su utilidad mate mática constituyen —como hemos visto (sección 1)— uno de los "actos" básicos del intuicionismo.

Para el intuicionista, el continuo de números reales no es la totalidad completada de puntos sin dimensión en una recta, sino más bien la "posibilidad de una determinación gradual de puntos", esto es, puntos descriptibles en térmi-

mática intuicionista que el carácter contradictorio (imposible) de $a \neq b$ equivale a $a \sim b$.[5] Sin embargo —y esto constituye un rasgo muy importante de la matemática intuicionista— "la prueba de la imposibilidad de la imposibilidad de una propiedad no constituye en todo caso una prueba de la propiedad misma". En otros términos: si escribimos "$\neg$" por "es contradictorio" o "es imposible", en el sentido de que esta noción ha de estar respaldada por una prueba constructiva, y "/>" por toda afirmación matemática (que no es la afirmación de una imposibilidad), entonces $\neg\neg p$ no implica p, como es el caso en la lógica clásica. El siguiente ejemplo, que muestra que este principio no es válido en lógica intuicionista, ha sido dado por Brouwer y se encuentra también en el libro reciente de Heyting.

"Escribo la expansión decimal de π y, debajo de ella, la fracción decimal p — 0.333. . . , que interrumpo tan pronto como ha aparecido en jt una sucesión 0123456789 de dígitos. Si el 9 de la primera sucesión 0123456789 en jt es el A-ésimo dígito después del punto decimal, q = 10^{fc} — 1/3.10*. Supongamos ahora que p no pudiera ser racional; entonces o = 10^{fc} ~ I/3.10^{fc} sería imposible, y ninguna sucesión podría aparecer en jt; pero entonces, p — 1/3, lo que es imposible también. El supuesto de que p no puede ser racional ha conducido a una contradicción, y sin embargo, no tenemos derecho alguno para afirmar que p es racional, porque esto significaría que podríamos calcular enteros p v q tales que p $= \frac{P}{q}$, y esto requiere manifiestamente que o podemos indicar una sucesión 0123456789 en n, o demostrar que no puede aparecer sucesión tal alguna."

Si dos generadores numéricos no coinciden (esto es, si $a \neq b$), puede subsistir entre ellos, con todo, una relación de desigualdad más fuerte. Ésta es la relación de carácter aparte. El hecho de que "a se encuentre aparte de b" —en símbolos, a 4|=b~ significa que "n y h pueden encontrarse tales que $|a_{n+p} - b_{n+p}| \geqslant 1/k$ para cada p". Es evidente que mientras a + b implica en general que a =/=6, lo inverso no es cierto. Al matemático clásico, una matemática

5 Véase la prueba de Heyting, *op. cit.*, p. 17.

de entidades atribuidas, tales como $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ se designa como *un elemento de la dispersión M* —con b_n como su componente n-ésimo. Dos elementos de dispersiones son iguales si sus componentes n-ésimos son iguales, y dos dispersiones son iguales si a cada elemento de una de ellas puede encontrársele un elemento igual de la otra.

Si comprendemos la noción de dispersión, podemos comprender la noción intuicionista del continuo como una posibilidad de ciertas construcciones actuales. Consideremos —siguiendo de cerca la exposición de Heyting, como anteriormente— una enumeración de números racionales: $r_1, r_2, \ldots$ (esto es, asignemos a cada número natural 1, 2, 3, ... —después de su construcción—, un número racional, en una forma que garantice que no se deja de lado número racional alguno) .

Definimos ahora la dispersión *M,* que representa el continuo intuicionista, como sigue: su *ley de dispersión* Λ_M determina que todo número natural forme una sucesión admisible de *un* miembro, y si $a_1, \ldots, a_n$ es una sucesión admisible, entonces $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ es una sucesión admisible si y sólo si

$$\left| r_{a_n} - r_{a_{n+1}} \right| < \frac{1}{2^n}$$

(r_{a_n} y $r_{a_{n+1}}$ son los números racionales que en nuestra enumeración de números racionales tienen los índices a_n y a_{n+1} respectivamente) . La *ley complementaria* Γ_M atribuye a toda sucesión admisible el número racional r_{a_n}.

Γ_M engendra así series infinitamente proseguidas de números racionales. Toda *sip* tal es un elemento de *M* y un generador numérico real. En efecto, para cada generador numérico real *c* puede encontrarse un elemento *m* de M, tal que *c* — *m.* Vale la pena insistir una vez más en que en toda esta cadena de definiciones no hemos supuesto en lugar alguno una infinitud realmente dada ni hemos abandonado el principio de que sólo existen entidades construíbles.

Del mismo modo que la noción de dispersión no nos permite suponer una totalidad infinita completa de entidades matemáticas —siendo, en cierto modo, un conjunto

nos de las nociones de sucesión infinitamente proseguida y de dispersión. La dispersión M es definida por dos leyes que Heyting,[6] cuya definición sigo casi al pie de la letra, designa respectivamente como *"ley de dispersión* Aj/' Y *"ley compensatoria* Γ_M*".*

Una *ley de dispersión* es una regla A que divide las series finitas de números reales en sucesiones admisibles e inadmisibles, según las siguientes cuatro prescripciones, a saber:

1] Mediante la regla A puede decidirse para todo número natural A si es o no una sucesión admisible de *un* miembro.

(La sucesión de *un* miembro consta de un solo número natural y una sucesión de *n* miembros, de *n* números tales. La sucesión ¿q, a_2, a_3 *se* designa como un descendiente inmediato de La sucesión ¿q, a_2, *y* ésta es un ascendiente inmediato de a_v a_2, a_3. Y la misma terminología general se emplea en el caso general de a_v a_{2t} . . . , a_n, a_{n+l} Y "1* a_2>' ' ■> ^{fl}n')

2] Toda sucesión admisible a_v a_2, . . . , a_n, a_{n+1} es un descendiente inmediato de una sucesión admisible íq, a_2, . . . , a_n.

3] Si está dada una sucesión admisible ¿q, . . . , a_n> la regla A nos permite decidir para cada número natural *k* si ¿q, . . . , a_n, *k* es una sucesión admisible o nc

4] Para cada sucesión admisible <q, . . . , a_n puede encontrarse cuando menos un número natural *k* tal que a_v . . . , a_{ft}, *k* sea una sucesión admisible.

La *ley complementaria* r_M de una dispersión Ai atribuye una entidad matemática definida a toda sucesión finita admisible según la ley de dispersión de *M.*

Consideremos ahora una sucesión infinitamente proseguida y sometámosla a la restricción de que para toda n ¿q, ¿q, . . . , a_n deba haber una sucesión admisible que concuerde con una ley de dispersión Ajp Esta sucesión infinitamente proseguida —en abreviatura, *sip*— ya no es una *sip* libre, sino una *sip* admisible (admisible por Am). La ley complementaria atribuye a cada sucesión admisible «v a_1, a_2; a_1, a_2, a_3; . . . una entidad matemática —atribuye, por ejemplo, Zq a a_Y; b_2 a a_1, a_2; . . . ; b_n a a_1, a_2, . . . a_n. Cada una de estas sucesiones infinitamente proseguidas

Esta claro que la teoría intuicionista de los números cardinales diferirá grandemente de la teoría clásica. Así, el requisito de constructibilidad y la concepción intuicionista de la negación, en cuanto requieren juntos estar respaldados por la construcción real de una contradicción, conducen a la negación de que una especie que no es finita es, en consecuencia, infinita. (La "especie infinita" es aquella que tiene subespecies infinitas enumerables, en donde "enumerables" significa correspondencia biunívoca, construible con la especie de los números naturales.)

3] LA LÓGICA INTUICIONISTA

La lógica intuicionista es un registro *post factum* de los principios de razonamiento que se han empleado en las construcciones matemáticas. En tanto que el logicista formula estos principios para atenerse a ellos, el intuicionista, en cambio, admite que las futuras construcciones matemáticas —noción que para él nada tiene de problemática— encarnarán acaso principios no formulados ni previstos hasta el presente. En tanto que el logicista justifica su matemática mediante una referencia a la lógica, el intuicionista justifica su lógica mediante un recurso a las construcciones matemáticas.

El intuicionista no se ocupa de la lógica en general, sino únicamente de la lógica de la matemática, esto es, de la "lógica matemática" en el sentido no de una lógica general materna tizada, sino de una formulación de los principios empleados en la actividad de la construcción matemática. Si bien los intuicionistas han producido sistemas formales que pueden hacerse y han sido hechos objeto de investigación matemática, estos sistemas los consideran aquéllos como productos accesorios lingüísticos de la actividad "esencialmente carente de lenguaje" de la matemática, y de valor principalmente pedagógico.

Desde un punto de vista puramente formal —esto es, aparte de toda interpretación buscada de símbolos, fórmulas y reglas de transformación—, la lógica intuicionista se presenta como un subsistema de la lógica clásica. Esto resulta particularmente obvio en el caso de algunos sistemas formales que han sido construidos con el propósito,

en devenir constante pero nunca acabado—, así la noción de especie (una propiedad matemática) tampoco nos permite suponer conjuntos realmente infinitos. Es obvio que la exclusión de la matemática de la "totalidad infinita" implica la prohibición de la propiedades de las totalidades infinitas.

La *especie* es una propiedad de la que se puede suponer que las entidades matemáticas la poseen. Después de haberse definido una especie *S,* cualquiera entidad matemática que fue definida o pudo haberlo sido *antes* de que lo fuera S y satisface la condición de ésta es un miembro de la especie.[7] Por ejemplo, la propiedad de coincidir con un generador numérico real es la especie "número reaF'.

Importa insistir con Heyting en que la antinomia de círculo vicioso (del conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos) no puede producirse en la matemática intuicionista, porque el injuicionista define la "especie" de tal modo que únicamente las entidades definibles independientemente de la definición de cualquiera especie dada pueden ser miembros de ésta.

La identificación de la existencia intuicionista con la constructibilidad real explica también las diferencias fundamentales entre la teoría clásica de los conjuntos o clases por una parte, y la teoría intuicionista de la especie por la otra. Así, por ejemplo, mientras "a 6 S" significa que *a* es un elemento de S —si *a* es definible independientemente de 5—, "a € *S"* significa que es imposible que *a* sea miembro de S o, en otros términos, que el supuesto de *a* 6 S conduce a una contradicción. Una vez más, si *T* es una subespecie de S (siendo todo miembro de *T* miembro de S). *S—T* no es la especie de los miembros de S *que no pueden ser miembros de T* En la teoría clásica de los conjuntos *"T tj (S—T)"* significa la clase de todas las entidades que son miembros de *T* o de S—T, o de ambas, y esta clase es igual a S. En vista de la definición más fuerte, constructiva, de *S—T,* la especie *T {j (S—T)* puede ser igual a *S,* pero no necesita serlo. (En el primer caso se dice que *T* es una especie separable de 5.)

[7] Heyting, *op. cit.,* p. 37.

p A *q* (*p* y *q*) no puede afirmarse más que si y sólo si ambos dejan afirmarse; *p* v *q* (*p* o *q*), si y sólo si puede afirmarse *p*, o *q*, o ambos. El significado de "$\neg p$" se ha explicado ya. Vale la pena observar aquí que inclusive la fuerte negación de la lógica intuicionista ha sido rechazada por algunos intuicionistas como demasiado débil, siendo la razón de ello que la prueba de la imposibilidad de una construcción no les parece equivaler a una construcción real, la cual, según un programa más radical, es la sola matemática. El intuicionista radical requiere una matemática y una lógica totalmente exentas de negación. Parece estar de acuerdo con el Fausto, de Goethe, en que "una contradicción perfecta es tan misteriosa para los sabios como lo es para los necios".[9]

La implicación intuicionista $p \to q$ no es una función de verdad. Heyting la interpreta como sigue: $p \to q$ puede afirmarse si y sólo si poseemos una construcción *W* la cual, unida a una construcción que pruebe *p* (suponiendo que esta última esté efectuada), efectuaría automáticamente una construcción que probara *q*. O bien, según lo dice de modo más conciso: una prueba de *p*, juntamente con *W*, constituiría una prueba de *q*. Podemos consignar ahora algunos teoremas y no-teoremas intuicionistas, anteponiendo el signo usual de afirmación /* a los primeros, y el de • a los segundos. La reflexión y el significado de los símbolos deberían justificar en última instancia la distinción.

[i] $\vdash p \to \neg\neg p$
 • $\neg\neg p \to p$
[ii] $\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
 • $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$
[iii] $\vdash \neg p \to \neg\neg\neg p$
 $\vdash \neg\neg\neg p \to \neg p$

(En otros términos: la afirmación de la imposibilidad de *p* es equivalente a la afirmación de la imposibilidad *de la imposibilidad de la imposibilidad de p.* Tres negaciones intuicionistas pueden contraerse siempre en una sola.)

[9] Véase Heyting, *op. cit.*, para detalles y referencias.

Ínter alia, de separar los principios y las reglas de inferencia intuicionista de la clase más amplia de principios y reglas que han sido adoptados por los lógicos clásicos y los no intuicionistas.[8]

Toda proposición intuicionista *p,* ocurra en ella o no la negación (intuicionista), es el registro de una construcción, En los términos de Heyting, dice, en* efecto: "He efectuado en mi mente una construcción *A". La* negación intuicionista -n *p* es asimismo el registro de una construcción y así, por consiguiente, una afirmación. Dice: "He efectuado en mi mente una construcción *B* que deduce una contradicción del supuesto de que la construcción *A* fuera llevada a término". La proposición "No he efectuado una construcción. . ." carece de interés, tanto para el intuicionista como para el matemático clásico. Pero, en tanto que el matemático clásico admite "existe una construcción matemática. . .", inclusive si nadie hasta el presente ha sido capaz de efectuarla, semejante proposición . sólo podría constituir desde el punto de vista intuicionista una promesa vacía: tal vez un estímulo para la investigación, pero no un elemento de la matemática.

Si consideramos el significado intuicionista de *p y* "• *p,* podemos ver inmediatamente que, si vamos a considerar la matemática, con el intuicionista, como la ciencia de las construcciones intuitivas, entonces, tomando "~i" en su significado requerido, la proposición *(p* o ¬ *p)* no es un principio universalmente válido de la lógica de la matemática. Por el significado de los diversos símbolos intuicionistas, y por los ejemplos de la sección anterior, vemos que *si* adoptamos la concepción y el programa de la matemática intuicionista no hay absolutamente nada extraño en la lógica intuicionista. En lo que sigue, vamos a considerar brevemente el vocabulario y algunos teoremas de la lógica intuicionista, sin intentar, con todo, una sistematización rígida de la misma, que sería, en todo caso, ajena a su espíritu.

8 Véase, por ejemplo, el sistema formal de Kleene en *Metamathematics,* §§ 19-23, en donde los principios, las reglas de inferencia y las pruebas intuicionistamcnte válidos se distinguen claramente de aquellos que sólo son válidos desde el punto de vista clásico.

nuevamente el significado de algunos de los términos clave intuicionistas y algunos de los teoremas y no-teoremas.

Si *P(x)* es un predicado de una variable que se extiende sobre una determinada especie matemática a, entonces:

"(x)P(x)" significa que poseemos un método general de construcción tal que, si se escoge un elemento cualquiera *a* de *a,* da la construcción P(a), y

"(Hx)P(x)" significa que, en relación con algún elemento particular *a* de a, se ha construido efectivamente *P(a).* Con fundamento en estas definiciones, las fórmulas siguientes.se revelan como teoremas o no-teoremas respectivamente.

[vi] /- *(x) P(x)* → -n (Hx) ¬ *P(x)*
* "i (Hx) ¬ *P(x)* → (x) P(x)
[vii] /- (Hx) P(x) → -n (x) i P(x)
* -nfx)-nP(x)-* (Hx)P(x)
[viii] A (3*) -1 *P(x)* → ¬ (X)P(x)
* -1 (x) P(x) -> (Hx) -n P(x)
[íx] /- (x) -n ¬ P(x) → -n (Hx) ¬ P(x)
M /- -n (Hx) -n P(x) → (x) -> -» P(x)

Estas secciones acerca de la lógica y la matemática intuicionista son esquemáticas e incompletas, por supuesto. En el mejor de los casos sólo podrán dar una idea del espíritu de la matemática intuicionista. A las personas que les interese establecer un contacto más directo con su sustancia se les recomienda estudiar a fondo la obra de Heyting y referirse a su (extensa) bibliografía. Por lo que se refiere a la relación entre el formalismo y el intuicionismo desde el punto de vista de la lógica y de la matemática, los lectores encontrarán la mayoría de los resultados disponibles en *Metamathemalics,* de Kleene.

[iv] $* \; p \vee \neg p$
$\nvdash \neg\neg(p \vee \neg p)$

[v] $\nvdash \neg(p \vee q) \rightarrow \neg p \wedge \neg q$
$* \; \neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q$

En el sistema formal de Heyting, $q \rightarrow (p \rightarrow q)$ es un axioma, y da razones[10] del porqué lo considera como intuitivamente claro. Podemos observar, en este punto, que cuando menos un intuicionista o cuasi-intuicionista niega claridad intuitiva a esta proposición. Semejante discrepancia a propósito de la naturaleza de la intuición es filosóficamente importante, y habremos de ocuparnos de ella en el próximo capítulo.

Al desarrollar la teoría usual de la cuantificación, constituye una consideración heurística útil, según vimos, ver en el cuantificador universal *una especie de* conjunción, y en el cuantificador existencial *una especie de* signo de alternación. Si los miembros de la conjunción o la alternación son finitos en número, los cuantificadores no son más que expedientes abreviados para la formulación de proposiciones funcionales de verdad. Si se efectúa la transición a conjunciones y alternaciones infinitas, entonces la analogía entre proposiciones universal o existencialmente cuantificadas, por una parte, y las conjunciones y alternaciones por la otra, aunque resulte útil en algunos casos, podrá ser, con todo, muy engañosa. Porque es el caso que una "conjunción infinita" o una "alternación infinita" son totalmente distintas, inclusive en la teoría usual, de una conjunción o una alternación finitas. (Véase p. 55.)

Al desarrollar la teoría intuicionista de la cuantificación, la derivación heurística de principios de cuantificación a partir del cálculo proposicional ha de emplearse con mayor cuidado todavía. Ha de verificarse constantemente a la luz del principio de que la existencia matemática es, desde el punto de vista intuicionista, constructibilidad real, así como con referencia a las nociones particulares de sucesiones infinitamente proseguidas y de dispersiones, nociones, ambas, que encarnan la concepción intuicionista de infinitud potencial. Podemos consignar

10 *Op. Ctt.*, p. 102.

"analíticas", sino "sintéticas". Las construcciones del formalista se efectúan, o pueden efeotuarse, en el mundo físico, y las del intuicionista en la mente, esto es, en un medio distinto de la percepción sensible y abierto únicamente a la introspección. Las proposiciones del formalista son sintéticas y empíricas, y las del intuicionista son sintéticas y no empíricas, esto es, *a priori.*

Para el intuicionista, toda proposición matemática verdadera se deja justificar por medio de una construcción que: 1] es una experiencia evidente en sí misma, y 2] no es una percepción externa. Está ligado, pues, profundamente a antiguas doctrinas filosóficas, aun cuando no desee discutirlas. La teoría intuicionista de la verdad matemática como validada por experiencias evidentes en sí mismas es una versión restringida de la teoría general cartesiana de la verdad, teoría cuya forma más plausible y madura será tal vez la que le ha sido dada por Eranz Brentano.[1] Por supuesto, la teoría de las construcciones intuitivas, no-perceptivas, se remonta a Kant.

Si una experiencia evidente en sí (o un tipo de experiencia) ha de validar cualquier enunciado perteneciente a una ciencia pública, ha de ser intersubjetiva. Ha de ser susceptible de ser experimentada por todo el mundo, cuando menos en condiciones adecuadas. Las experiencias privadas, como aquellas de las que hablan los místicos, no pueden validar una teoría científica, ni siquiera si son evidentes en sí. Además, la evidencia inmediata de una experiencia ha de ser intrínseca a ésta o inseparable de ella. La persona que experimente la experiencia ha de reconocerla *eo ípso,* sin el empleo de criterio alguno, como inmediatamente evidente. Esto implica —segúnlo vio Brentano y no siempre Descartes— que postular algo por el estilo de un "criterio" de autoevidencia es o redundante o falaz.

En efecto, si una experiencia se reconoce como evidente en sí misma al vivirla, no se necesita criterio alguno, y si una experiencia presuntamente autoevidente no se reconoce como tal al vivirla, entonces no es inmediatamente evidente. Así, pues, la "claridad y distinción" constituye

1 Véase,por ejemplo, *Wahrheit und Evidenz,* Leipzig, 1930.

CAPÍTULO SÉPTIMO

LA MATEMÁTICA COMO LA ACTIVIDAD DE LAS CONSTRUCCIONES INTUITIVAS: CRÍTICA

De acuerdo con el plan de este ensayo hemos de examinar ahora la filosofía intuicionista de la matemática pura y aplicada, así como su teoría distintiva de la infinitud matemática. Es el caso, sin embargo, que los intuicionistas modernos han prestado al problema del carácter de la matemática aplicada menos atención todavía que los lógicos y los formalistas. De hecho, su filosofía de la matemática aplicada es algo que debemos conjeturar en gran parte, constituyendo la base para la conjetura, principalmente: 1] ciertas observaciones de Brouwer y Weyl (de Brouwer acerca de la afinidad de su filosofía con la de Kant, y de Weyl acerca de la relación entre la matemática intuicionista y las ciencias naturales), y 2] la presunción razonable de que la filosofía intuicionista de la matemática aplicada y su filosofía de la matemática pura son congruentes una con otra. Estas teorías se tratarán en el orden indicado.

Una sección final señalará algunas indicaciones de nuevos desarrollos derivados sobre todo del choque fecundo entre los puntos de vista formalista e intuicionista. Si bien es de carácter expositivo, esta sección queda mejor, con todo, al final de nuestro examen del formalismo y del intuicionismo cual puntos de vista separados.

1] LOS TEOREMAS MATEMÁTICOS COMO INFORMES DE CONSTRUCCIONES INTUITIVAS

Vimos que el metamatemático formalista y el matemático intuicionista pretenden lo mismo, esto es, que sus proposiciones no son proposiciones de la lógica. Son, en efecto, acerca de una materia de estudio que primero se produce (construye) y luego se describe. Por consiguiente, no son

psicólogos introspectivos y los matemáticos intuicionistas pretenderían haber reconocido y corregido errores propios, y no meramente de descripción. Una ciencia en la que no puedan cometerse errores y en la que todas las discrepancias sean lingüísticas podrá no ser acaso inconcebible, pero es sumamente improbable. Tendremos ocasión, muy en breve, de examinar algunas discrepancias entre intuicionistas, y veremos que no son consideradas, ni por los contraopinantes mismos, como meramente lingüísticas.

Las discrepancias en los relatos a propósito de una y la misma experiencia pueden referirse a su contenido o simplemente a su evidencia inmediata. Las dos clases de discrepancia son igualmente fatales al postulado en favor de la experiencia misma, en el sentido de que es autoevidente. Para ilustrar la primera clase, podrá ocurrir acaso que, después de atravesar la experiencia de percibir cierto dato, dos psicólogos introspectivos o “fenomenólogos” informen diversamente a su propósito, esto es, le atribuyan características que sean incompatibles entre sí. En tal caso, le falta a la experiencia inclusive un contenido claramente delimitado. Y por lo que se refiere a la segunda clase de discrepancia, de dos personas que atraviesen la misma experiencia una podrá introspectarla acaso como autoevidente, y la otra, en cambio, no. Me limitaré, por mi parte, a recurrir únicamente a discrepancias de esta segunda clase, esto es, a discrepancias acerca de la presunta evidencia directa de determinadas experiencias.

El edificio filosófico cartesiano consta de informes de experiencias presuntamente autoevidentes, o de proposiciones derivadas de las mismas por medio de inferencias presuntamente autoevidentes. No cabe duda alguna de que los informes de Descartes a propósito de experiencias autoevidentes son incompatibles con otros informes de las "mismas” experiencias. En efecto, sólo necesitamos vivir las experiencias a las que se refiere en algunos de sus argumentos teológicos y físicos y comparar nuestras descripciones con las suyas para percatarnos de que ni éstas ni las nuestras son evidentes en sí mismas. El argumento de las descripciones contradictorias a propósito de una misma experiencia resulta desastroso para el cartesianismo.

un elemento congénito de la "autoevidencia", y no es el nombre de un criterio de evidencia inmediata. En todo caso, los intuicionistas consideran las construcciones matemáticas como experiencias intersubjetivas, y su evidencia inmediata como intrínseca.

Sin embargo, si bien no hay un criterio para la presencia de la autoevidencia, sí lo hay, en cambio, de su ausencia. En efecto, si dos relatos acerca de la misma experiencia intersubjetiva, lingüísticamente correctos ambos, son incompatibles, entonces la experiencia no puede ser autoevidente, sea lo que fuere lo que la "autoevidencia" pueda significar. Porque, toda vez que un relato lingüísticamente correcto de una experiencia evidente en sí misma es necesariamente cierto, según la teoría, y toda vez que dos relatos lingüísticamente correctos que sean incompatibles no pueden ser verdaderos los dos, síguese que la experiencia relatada no puede ser autoevidente.

Contra el punto de vista de que es posible que dos relatos correctos de la *misma* experiencia sean incompatibles cabría formular dos objeciones: primero, que nunca pueden dos personas vivir la misma experiencia y, en segundo lugar, que un relato lingüísticamente correcto de una experiencia no puede ser materialmente falso. Las dos objeciones no carecen ciertamente de sensatez, pero ninguna de ellas puede formularse desde el punto de vista de una teoría de la autoevidencia, ya sea de la verdad en general o de la verdad matemática en particular

Si nunca dos personas pueden vivir la misma experiencia, entonces, al no ser intersubjetiva, la experiencia no puede validar las proposiciones intersubjetivas de cualquier ciencia que sea. Por ejemplo, no puede haber ciencia intersubjetiva alguna de la psicología introspectiva, ni ciencia intersubjetiva alguna de la matemática en cuanto relativa a construcciones intuitivas.

Por otra parte, si algún relato lingüísticamente correcto de una experiencia pudiera ser falso, entonces los psicólogos introspectivos y los matemáticos intuicionistas no podrían cometer más errores que los lingüísticos. Y sin embargo, tanto los psicólogos introspectivos como los matemáticos intuicionistas admiten la posibilidad de errores que no son lingüísticos. Ha de haber casos en que los

de diversos matemáticos intuicionistas, a propósito de esta clase de experiencia, resulta que ninguna experiencia expresable únicamente por medio de una negación intuicionista puede ser autoevidente, y ningún relato al respecto puede ser un teorema, en el sentido intuicionista, esto es, en el sentido en que un teorema es un informe de una construcción autoevidente. Lo que se aplica a relatos de la forma “$\neg p$” se aplica asimismo a informes de la forma “$\neg\neg p$”, toda vez que $\neg\neg p$ no implica *p.*

El argumento de los relatos contradictorios acerca de experiencias presuntamente autoevídentes lo utilizan los intuicionistas mismos contra el postulado kantiano de que los teoremas de la geometría euclidiana son proposiciones sintéticas *a priori,* puesto que son informes de construcciones evidentes en sí mismas en el medio intuitivo del espacio como tal, esto es, en el espacio vaciado de todo contenido sensible. Esto, Brouwer lo rechaza. Pero acepta, en cambio, el postulado de Kant según el cual los teoremas de la aritmética elemental son expresión de construcciones autoevídentes en el tiempo. Lo que para él descarta el carácter sintético *a priori* de la geometría euclidiana no es la posibilidad lógica de construir geometrías no-euclidianas, posibilidad de la cual el propio Kant se daba cuenta, sino la discutible autoevidencia de unas construcciones que respaldan presuntamente la geometría euclidiana y ninguna otra. Es posible que el descubrimiento de geometrías no-euclidianas haya sido una de las causas que condujeron a la negación de esta autoevidencia, pero es lo cierto, con todo, que en sí mismo no la implicaba.

El papel del argumento de los informes contradictorios a propósito de construcciones presuntamente autoevídentes es similar, en cuanto socava la seguridad de la matemática intuicionista, al que desempeñaron las antinomias en el debilitamiento de la seguridad de la teoría “ingenua” de los conjuntos y, por consiguiente, de la matemática clásica. Por lo que se refiere a las antinomias, la principal dificultad está no tanto en que ocúrran, sino en que nunca podamos saber a ciencia cierta cuándo y dónde volverán a aparecer. (Véase p. 79.) Y en forma análoga, la principal dificultad ocasionada por el argumento de los infor-

Ahora bien, ¿puede volverse el argumento contra aquellas experiencias autoevídentes de las que se supone que validan las proposiciones *a priori* sintéticas del intuicionismo? Que sí puede resulta claro si reflexionamos sobre el tratamiento intuicionista de la negación. Heyting, según tuvimos ya ocasión de observarlo, ha descrito la situación con su lucidez habitual. Sin embargo, hay una dificultad que Heyting no considera: la grave dificultad que surge así para la filosofía intuicionista de la matemática.

Consideremos la proposición "un círculo cuadrado no puede existir". Es una proposición que Brouwer y Heyting[2] admiten como teorema. Ha de ser, por consiguiente, una descripción lingüísticamente correcta de una experiencia intersubjetiva autoevidente. Brouwer la describe como una construcción que consiste en suponer primero que hemos construido un cuadrado que es al propio tiempo un círculo, y en derivar luego una contradicción del supuesto en cuestión. Sin embargo, una construcción supuesta, y a mayor abundamiento una que es irrealizable, es algo totalmente distinto de una construcción real. Y si bien Brouwer describe la autoevidencia de la experiencia que empieza por suponer la construcción irrealizable, no debe maravillarnos, con todo que otros describan la experiencia como no autoevidente. Y algunos intuicionistas inclusive sostienen que un supuesto irrealizable no tiene para ellos "sentido claro alguno". Así, pues, que la construcción no es evidente por sí misma lo prueba el argumento de las descripciones contradictorias; y una descripción que no es la descripción de una construcción inmediatamente evidente no es, por definición, un teorema intuicionista de matemática.

Lo propio se aplica a todos los relatos en los que ocurre la negación intuicionista. Porque es el caso, según vimos anteriormente, que $\neg p$ registra, en las palabras de Heyting, la experiencia "de haber efectuado en nuestra mente una construcción B_t que deduce una contradicción del supuesto de que la construcción *A* hubiera sido llevada a buen fin".[3] Toda vez que hay relatos contradictorios,

[2] *Op. cit.,* p. 120.
[3] *Qp. ciL,* p. 19.

Semejante seguridad no podría lograrse, a menos que se dejara delimitar una clase segura de construcciones. Pero esto requeriría un criterio positivo de autoevidencia, y criterio tal no puede haberlo. En efecto, lo autoevidente es aquello que ni necesita una prueba ulterior ni tampoco la admite.

La lógica de la matemática *ex post fado,* que no presupusiera construcciones irrealizables, sería una sedicente lógica "positiva", una lógica sin negación, por ejemplo, el subsistema apropiado de *Principia Mathematica.* Sin embargo, definir como admisibles únicamente aquellas construcciones que son conformes a una lógica positiva no le estaría dado al intuicionista. Para él, en efecto, la lógica de la matemática la validan las construcciones matemáticas autoevidentes, y no son éstas las que validan a aquélla. Y es que para aquél la matemática es una actividad no sólo "carente de lenguaje", sino también "carente de lógica".

Podría acaso parecer posible discernir dentro del intuicionismo un núcleo duro de construcciones que pueden llevarse efectivamente a cabo sobre objetos perceptivos. En tal caso, los informes a propósito de éstos serían teoremas' de una matemática estrictamente fínitista[4] Pero aquí nos topamos con otra dificultad, esto es, que las construcciones autoevidentes tienen lugar en la intuición, y no en la percepción sensible.

Una intuición no-sensible, como una experiencia autcevidente, constituye una noción filosófica difícil. Si bien se pretende que las construcciones intuitivas son autoevidentes, la existencia de intuiciones no-sensibles no es, con todo, incontrovertida en modo alguno. Esto puede verse considerando la doctrina kantiana del carácter sintético *a priorí* de la geometría euclidiana, que los intuicionistas discuten. (Véase cap. 1, sección 4). No nos interesa tanto aquí el argumento de Kant —de aquellos juicios *no-discursivos sintéticos a priori* que se supone que formamos habitualmente, a su fundamento en una pura intuición de es-

[4] Véase un examen de la relación entre el intuicionismo y algunas variantes más o menos estrictas de finitismo, por ejemplo, en G. Kreiscl, "Wittgenstein's Rcmarks on the Foundations cf Mathcmalíes", especialmente sección 6, *Kritish Journal for the Philosophy of Science,* ¡958, vcl. ¡x. no. 34.

mes contradictorios no es que haya sido aplicado con éxito, por ejemplo, en el caso de las negaciones y las dobles negaciones intuicionistas, juntamente con las construcciones por ellas expresadas. Es, antes bien, que no podemos saber nunca cuándo y cómo volverán a golpear. Y la analogía adquiere un peso complementario del hecho de que uno de los objetivos y postulados del intuicionismo es el de desterrar de la matemática a la inseguridad.

Cabría objetar que nuestro argumento contra la concepción intuicionista de la matemática ha sido "puramente filosófico", y que no es más que una variante del argumento bien conocido contra la teoría brentano-cartesiana del conocimiento, que analiza la verdad en términos de experiencias inmediatamente evidentes. Y esto es efectivamente así. Pero eslo cierto que un argumento no se vuelve en nada peor por el hecho de que se le ponga un mal nombre.

Cabría señalar que podría practicarse en la posición intuicionista un ligero cambio que la hiciera invulnerable al argumento de los informes contradictorios, cambio que preservaría la matemática intuicionista al precio de sacrificar su filosofía de la matemática. Todo lo que necesitamos hacer, podrá sugerirse, es concentrarnos en los formalismos intuicionistas construidos hasta el presente, desarrollarlos más y demostrar su congruencia. El plan está en concentrarse en los informes y en su congruencia lógica mutua, y en olvidar que habían de ser informes de construcciones. autoevidentes. Esto equivaldría a considerar a los intuicionistas como formalistas interesados en formalismos de otra clase que los de los hibertianos. Es un plan que podría seguirse y se ha seguido. Sin embargo, para el intuicionista significa su conversión al formalismo. El cambio que se le invita a practicar es fundamental. Es incompatible con su punto de vista de que la matemática es una actividad, carente de lenguaje, de construcciones autoevidentes.

Si restringiéramos las construcciones matemáticas a las que pueden registrarse sin el empleo de la negación y la doble negación intuicionistas, la matemática intuicionista se vería grandemente empobrecida, sin estar siquiera asegurada contra la posibilidad de informes contradictorios.

tiano de que hay una intuición espacial autoevidente, nítida y restrictiva, que es la sola que haría de la geometría euclidiana un cuerpo de proposiciones *a priori* y sintéticas *únicas.* (El propio Kant se preocupaba más de mostrar el carácter sintético y *a priori* de los axiomas y los teoremas matemáticos que su carácter único, carácter, este último, que propendía a considerar como natural.) Pero la intuición temporal que suponen es asimismo autoevidente, precisa y única, en el sentido de que solamente los objetos que son casos de los conceptos exactos de la matemática intuicionista son construibles en la intuición temporal, siendo los objetos de otros sistemas matemáticos meros postulados, de cuya posibilidad lógica hay que desconfiar inclusive allí donde no se la puede negar de plano.

La explicación intuicionista de los teoremas de la matemática como informes de construcciones autoevidentes, sean éstas las que fueren, se apoya en última instancia en una concepción autoevidente de la verdad matemática. En vista de las graves incursiones que los argumentos de informes contradictorios han efectuado en la teoría kantiana de una pura intuición del espacio y el tiempo y en la teoría moderna de las construcciones intuitivas —incluidas, en particular, construcciones “supuestas pero irrealizables”—, el intuicionismo moderno no puede considerarse como una filosofía satisfactoria de la matemática pura.

Sin embargo, el intuicionismo está libre por completo de la confluencia de conceptos perceptivos y matemáticos como la que encontramos en la teoría formalista de la matemática pura y en la teoría logícista (rudimentaria) de la matemática aplicada. Y tampoco está expuesto a las objeciones formuladas contra el postulado logicista de que la matemática se pueda reducir a la lógica, postulado que sólo puede abonarse definiendo primero a la lógica como la que contiene aquellos conceptos, proposiciones y reglas de inferencia que se necesitan para deducir la matemática, tal como la conocemos.

2] EL INTUICIONISMO Y LA CONDICIÓN LÓGICA DE LA MATEMÁTICA APLICADA

Según las teorías del tipo Frege-Russell, la percepción y

pació— como las propiedades que la pura intuición en cuestión ha da poseer para no ser vacua.

Que las construcciones autoevidentes deban ser pasibles en ella es la característica más importante que la intuición se supone poseer. Sin embargo, hay otras dos características que la intuición ha de tener, si es que ha de cumplir su función como fundamento de "la posibilidad" de la geometría euclidiana, a saber: precisión y carácter único. Por precisión quiero decir que los objetos de las construcciones geométricas han de ser casos de conceptos exactos, esto es, de conceptos que no tienen casos límite. Los conceptos de los objetos perceptivos son inexactos. Inclusive si un objeto es un caso claro de una "elipse visual", pongamos por caso, este concepto, a diferencia de la "elipse geométrica" tiene casos límite. Esta diferencia (entre conceptos matemáticos exactos y conceptos empíricos inexactos correspondientes) que el logicismo y el formalismo ignoran, por cuanto juntan conceptos exactos e inexactos, se ha examinado ya en los capítulos en los que se hace la crítica de esas posiciones. Ahora, en cambio, la intuición pura kantiana del espacio es la intuición de casos de conceptos *exactos*, por ejemplo, "punto euclidiano", "línea euclidiana", etc. En cierto modo, ella hace a dichos objetos disponibles, puesto que no están disponibles en la percepción sensible. (Véase cap. vni, en donde el tema se tratará sistemáticamente.)

La nitidez de la intuición espacial —la provisión de objetos para los conceptos exactos de la geometría euclidiana— no es suficiente para el propio propósito de Kant, que era el de mostrar que la geometría de Euclides es la *única* geometría cuyos axiomas y teoremas son sintéticos *a priori.* Para este propósito la intuición espacial ha de ser restrictiva, tanto en cuanto es un lugar de almacenamiento en el que los objetos se reconocen, como en cuanto es un lugar de manufactura en el que los objetos se construyen. Ha de ser tan restrictiva que solamente sean euclidianos los objetos encontrados o construidos en ella. Porque únicamente así puede aislarse la geometría euclidiana, de entre todas las otras geometrías posibles, como *la* geometría real.

Los intuicionistas modernos rechazan el postulado kan-

modar esta disciplina entre las ciencias *a priori*) más allá de lo que se admite como intuitivo en la primera *Critica.*[7] Si la aritmética y la geometría constan de informes de construcciones autoevidentes en el tiempo y el espacio, la física teórica ha de constar de informes de intuiciones igualmente autoevidentes relativas al *movimiento* en el espacio y el tiempo. Añadiendo el movimiento a la estructura espacio-tiempo, como algo en lo que también nosotros podemos tener intuiciones autoevidentes, se ha operado la transición de la matemática pura a la aplicada, y se trata de una transición que, según Kant, permanece en el campo del conocimiento *a priori.* (Cabría objetar que el movimiento presupone la materia y que la "materia" es un concepto empírico. No hay necesidad alguna, con todo, de entrar en cuestiones de exégesis.)

En todo caso, Kant distingue entre "ciencias naturales puras", como la física teórica, que solamente es posible "mediante la matemática", y un "arte sistemático o una doctrina experimental", como la química de sus días, que "no contenía ley alguna que hiciera posible representar el movimiento de las partes químicas y sus consecuencias, *a priori* e intuitivamente, en el espacio".[8] La matemática aplicada o, lo que para él es equivalente, las ciencias naturales *a priori,* son la aplicación (o bien, según podría decirse también, la extensión) de la matemática pura —aritmética y geometría— a la materia en cuanto capaz de movimiento. Esta extensión conduce, sostiene él, a la física *a priori* o racional cuyas ramas son la foronomía, la dinámica, la mecánica y la fenomenología o En el sentido de estas breves observaciones ha de comprenderse la concepción de Kant de la matemática aplicada como una ciencia natural racional; y en el mismo sentido hemos de entender su enunciado a menudo citado de que "una teoría de la naturaleza sólo habrá de comprender ciencia propia en la medida en que la matemática se deja aplicar en ella".™

Es importante subrayar que Kant no considera la diná-

~ Véase, por ejemplo, su ñola 2, p. 482, *op. cit.*
8 *Op. cit.,* p. 471.
9 *Op. CÍL,* p. 477.
10 *op. cit.,* p. 470.

la matemática están enlazadas en última instancia median- te su definición del número natural como una clase de clases cuyos elementos son objetos de cualquier género y en particular, por consiguiente, también objetos percep tivos. Por otra parte, según Hilbert y sus discípulos, hay una conexión inmediata entre la matemática y la percep ción. En su opinión, la matemática es una determinada actividad reglamentada de manipular objetos perceptivos muy simples, y la metamatemática es la teoría de esta ma nipulación. He sostenido, por mi parte, que en relación con cada una de estás teorías se plantea un problema es pecial sobre la naturaleza de la matemática aplicada. Se plantea con especial urgencia en relación con el íntuicio- nismo, a causa de la estricta separación que efectúan los intuidonistas entre la intuición y la percepción.

La filosofía in tuición ista de la matemática pura deja margen para cualquiera de las dos amplias concepciones de la matemática aplicada, a saber: por una parte, para la concepción de que la matemática aplicada debe absor berse en la pura, toda vez que los teoremas de las dos ciendas han de tomarse como informes de construcciones intuitivas autoevidentes; y por otra parte para la concep ción de que la matemática aplicada es una "matemática" "impura", empírica y falsificable, cuyos teoremas no son en absoluto ni informes de intuiciones autoevidentes ni construcciones. Ambas concepciones merecen considerarse. La primera se remonta a Kant y está desarrollada con con- siderable detalle por él en sus *Principios metafísicas de las ciencias naturales*[5] y la segunda está expresada en breve sugestión —casi como una reflexión tardía— por Hermana Weyl, en su *Philosophy of Mathematics and Natural Science*.[6]

Un esbozo de la filosofía kantiana de la matemática pura y aplicada, tal como se la encuentra en *La crítica de la razón pura,* se dio en el capítulo introductorio. En su obra posterior sobre la física teórica, Kant parece haber extendido el alcance de la intuición (con objeto de aco-

5 *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwisscnschaft,* ed. acad., vol. 4.

® Princeion, 1949, apéndice A.

inclusive en el sistema de Hilbert". La alternativa le parece encontrarse en la obra de los físicos teóricos originales. "¡Cuánto más convincentes y vecinos de los hechos son los argumentos heurísticos y las construcciones sistemáticas subsiguientes en la teoría de la relatividad general de Einstein, o en la mecánica cuántica de Heisenberg-Schródingerl Una matemática verdaderamente realista debería concebirse en concordancia con la física, como rama de la construcción teórica del único mundo real, y debería adoptar la misma actitud sobria y precavida hacia las ampliaciones hipotéticas de sus fundamentos que se aprecia en la física." [11]

El pensamiento de Weyl a propósito de la matemática aplicada, y en particular de la física teórica, puede comprenderse como una modificación de la concepción de Kant, un informe acerca del movimiento en el espacio y postulado que considera que puede seguir manteniéndose en relación con la matemática intuicionista. En opinión de Weyl, la dinámica de Newton no es, como lo creyera Kant, un informe acerca del movimiento en el espacio y el tiempo, o una *descripción* del mismo, en tanto característica invariante de nuestra experiencia del mundo, sino más bien una reconstrucción racional suya.

Sin embargo, semejante reconstrucción no está meramente ocasionada, para Weyl, por la experiencia sensible en el experimento y la observación física particulares, sino que ha de estar de *acuerdo* con aquélla. Y es siempre provisional. Depende de la física experimental, que implica la posibilidad, siempre presente, de la aparición de nuevo material empírico. Éste hace que la reconstrucción racional que parecía concordar con la experiencia resulte ahora en discrepancia con ella.

La física newtoniana, pues, parecía concordar con la experiencia, pero resultó que concordaba menos con ella que la física de la relatividad y la física cuántica.

¿Qué significa, necesitamos preguntar, decir que una construcción racional *concuerda* con la experiencia? Weyl no lo explica, y parecería equivocado pedir una explicación demasiado detallada, si todo lo que se expone es un

11 *Op. cit.,* p. 235.

mica racional, por ejemplo, como una meramente de las muchas teorías alternativas *cencebibles,* sino como parte de aquella ciencia natural que es sintética y *a priori,* esto es, que es verdad del mundo e independiente de la experiencia de los sentidos. La experiencia sensible no es en modo alguno, en esta visión, la razón de nuestro conocimiento de la dinámica racional, sino simplemente la ocasión de adquirirlo. Del mismo modo exactamente como el niño aprende que una determinada respuesta a una determinada suma es correcta en ocasión de experimentar con las cuentas de un ábaco, así adquirió Galileo el conocimiento de la ley de la caída libre de los cuerpos, en ocasión de sus experimentos en Pisa.

Semejante concepción de la matemática aplicada podrá ser plausible en un momento en que sólo existe un sistema de dinámica racional. El hecho de que no haya más que uno explica hasta cierto punto la idea de que sólo podía haber uno. Y efectivamente, la convicción de que la dinámica newtoniana era la sola dinámica posible estuvo muy extendida entre los físicos por más de cien años o, para ser exactos, por ciento y un años después de la muerte de Kant. Toda vez que el mero reconocimiento de que la teoría especial de la relatividad *podría* ser cierta, y la física de Newton falsa, hace imposible considerar las proposiciones de esta última como informes autoeví- dentes de construcciones en los que la matemática pura se “aplica" a la materia, entendida como aquello que es capaz de movimiento.

Nos volvemos ahora hacia la explicación sugerida por uno de los grandes matemáticos y físicos teóricos de nuestro tiempo, Hermán n Weyl. Pese a que fuera él mismo autor de un sistema “semi-intuicionista”, prefirió el sistema plenamente intuicionista de Brouwer al suyo, por considerar que éste hacía más justicia a lo que la matemática pura es o debería ser. (Que una teoría de la matemática pura *debería* ser intuicionista se sigue de la posición filosófica general de Weyl, que es muy parecida a la de Brouwer.)

La matemática intuicionista es demasiado restringida, en opinión de Weyl, para adaptarse a la física teórica. Le “estorba el alto grado de arbitrariedad que implica. . .

terísticas matemáticas (exactas), también él deja el problema filosófico de la matemática aplicada, a cuyo cuerpo tanto ha contribuido, prácticamente en el lugar en que lo encontró.

Cabría objetar que los físicos teóricos resuelven el problema de la matemática aplicada *ambiciando* —esto es, construyendo sus teorías y haciéndolas cada vez más eficaces. Es el caso, sin embargo, que ningún reconocimiento de este hecho obvio, ni mera apreciación alguna de la obra de los físicos, podrá remplazar la comprensión de la estructura de la matemática aplicada.

3] LA CONCEPCIÓN INTUICIONISTA DEL INFINITO MATEMÁTICO

Al examinar la concepción del infinito de Hilbert, distinguimos tres posiciones filosóficas, a saber: el finitismo, el transfinitismo y el transfinitismo metodológico. El intuicionismo es un finitismo moderado, el cual, si bien repudia la noción de los infinitos reales, confiere "realidad e inteligibilidad", con todo, a la noción de sucesiones potencialmente infinitas, esto es, susceptibles de proseguirse indefinidamente y siempre incompletas. Vimos que cada una de estas posiciones podía considerarse ya sea como una tesis o como un programa; que considerándola como una tesis, se implicaba la falsedad de posiciones incompatibles con ella, y que, considerándola como programa, implicábamos que podía ejecutarse o cumplirse sin implicar necesariamente el carácter insatisfactorio de los programas que fueran incompatibles con él.

Ahora bien, Brouwer considera el intuicionismo no meramente como un programa, sino también como una tesis, y así particularmente en el caso de la doctrina intuicionista del infinito potencial. No deja subsistir duda alguna, por una parte, de que las sucesiones de prosecución infinita no son meramente para él construcciones que prefiere a otras o en las que esté particularmente interesado, sino que, por el contrario, deja claramente sentado que las sucesiones de prosecución infinita son los únicos infinitos dados a los seres pensantes y perceptores, y que les están dados en la percepción o la intuición puras.

Pero por otra parte no deja subsistir duda alguna de

obiter dictum. Sin embargo, la concordancia —para servirnos de una expresión favorita de Weyl— que requerimos deba existir entre una reconstrucción racional y la experiencia reconstruida es distinta de la que pedimos que exista entre una generalización empírica y la experiencia generalizada. Una ley empírica de la naturaleza —por ejemplo, una proposición general acerca de la caída libre de los cuerpos— ha de implicar *lógicamente* toda proposición particular que confirme la ley general. En cambio, una ley de la naturaleza expresada "racional" o matemáticamente, no puede implicar lógicamente los hechos experimentales con los que concuerda. Y efectivamente, la ley de la caída libre, de Galileo, es un enunciado a propósito de partículas materiales, pero no acerca de cuerpos físicos, y la ley einsteiniana correspondiente lo es de campos métricos.

Las reconstrucciones racionales están formuladas en términos de conceptos exactos que no admiten casos-límite, en tanto que las generalizaciones empíricas a propósito del comportamiento de los cuerpos físicos, tanto en el laboratorio como fuera de él, están formuladas en términos de conceptos inexactos. En efecto, los conceptos "intervalo de tiempo perceptivo", "intervalo de espacio perceptivo" y otros que caracterizan los objetos perceptivos son todos ellos inexactos; en tanto que los conceptos "intervalo de espacio newtoniano", "intervalo de tiempo newtoniano", "intervalo espacio-tiempo einsteiniano" y todos los conceptos de la física teórica son exactos. De ahí que un análisis de la concordancia entre las proposiciones exactas de la física teórica (entre proposiciones que consisten en la aplicación de conceptos exactos) y proposiciones perceptivas inexactas requiera una comparación preliminar entre la lógica de los conceptos exactos y la de los inexactos. (Véase cap. vni.)

Al oponer a la matemática pura, separada de la percepción sensible, una matemática aplicada realista y falsificable, que sirve para describir la percepción sensible, Weyl muestra que se da perfecta cuenta del abismo entre los conceptos empíricos y matemáticos. Pero, toda vez que deja de indagar la lógica de las características perceptivas (inexactas) y de compararla con la lógica de las carac-

formalismo, si toda proposición lógica tiene una contrapartida formal, en tanto que no tod? proposición formal, tiene una contrapartida 'lógica. Hilbert pretende que su lógica no contiene el principio irrestricto del tercero excluido, pese a que el formalismo de la matemática lo contenga. Y la interpretación expresa de Brouwer es que esta lógica de Hilbert contiene de hecho el principio en cuestión de modo implícito.

Ahora bien, la afirmación de Brouwer es notable por dos razones cuando menos. Primero, fue hecha antes de que GÓdel hubiera demostrado que la lógica, o la metamatemática, de la que Hilbert se proponía servirse para demostrar la coherencia de (sustancialmente) el formalismo de la matemática clásica, no es adecuada al propósito. La estructura de los métodos metamatemáticos había de ampliarse. Y la ampliación propuesta no equivalía, declaradamente, a la adopción del principio del tercero excluido. Pero adoptar el principio de la inducción transfinita como parte de esta lógica o de esta metamatemática débil equivale casi prácticamente, desde el punto de vista intuicionista, tanto a una admisión de la circuí aridad como lo habría sido la adopción de la ley del tercero excluido. Y efectivamente, cuanto más fuerte debamos hacer la lógica o la metamatemática, en comparación con el formalismo cuya congruencia debe demostrarse matemáticamente, tanto menos útil parecerá ser el programa de Hilbert.

Hay otro rasgo notable en el informe de Brouwer sobre su intuición autoevidente. Se refiere no sólo a la circularidad de los intentos de Hilbert y sus discípulos de probar, sin la ley del tercero excluido, la coherencia de un formalismo que contiene el correspondiente principio formal, sino que afirma además la circularidad de *todo* intento de esta clase.

Hay que insistir, con todo, en que la intuición de Brouwer no se ha visto confirmada independientemente, ni siquiera por la prueba de Godel del carácter inadecuado de la matemática original. Es discutible que la metamatemática pudiera reforzarse suficientemente introduciendo principios que no sean la ley del tercero excluido. Con la máxima seguridad esto no es así con respecto a toda la metamatemática *posible.* Es muy probable que la in-

que el transfinitismo metodológico de Hilbert es para él no sólo incompatible con el intuicionismo, sino que es *falso.* Y lo que es más todavía, lo considera como fundado en un círculo vicioso, cuya repudiación final no es más que una cuestión de tiempo. Considera que la falsedad de la posición de Hilbert está revelada por la experiencia puramente reflexiva, una experiencia "que no contiene elemento disputable alguno”.[12]

La pura reflexión nos muestra, sostiene Brouwer, que “la justificación lógica *(inhaltliche)* de la matemática formalista mediante una prueba de su coherencia contiene un *circulus vítiosus,* porque esta propia justificación presupone ya la corrección lógica *(inhaltliche')* del enunciado de qu . la corrección de una proposición se sigue de su coherencia, esto es, presupone la corrección lógica *(inhaltliche)* de la ley del tercero excluido”. Esta afirmación de Brouwer, si es cierta, da en la médula misma de la posición de Hilbert/ tanto como tesis como en cuanto programa. En el mejor de los casos, el formalismo, en cuanto difiere del intuicionismo, se reduce a una acumulación de la reserva de fórmulas matemáticas *(des mathematischen Formelbestandes) .*

Para comprender el criticismo de Brouwer, hemos de recordar que Hilbert distingue entre conceptos, proposiciones e inferencias lógicos *(inhaltliche)* por una parte, y “conceptos”, “proposiciones" e “inferencias” formales “-puramente simbólicos— por la otra. La ley del tercero excluido, en cuanto aplicada a los infinitos reales, es para él una ley formal sin contrapartida lógica *(inhaltliche)*, exactamente del mismo modo que el concepto de un agregado transfinito no es más que un concepto formal. Y lo mismo cabe decir de otros principios transfinitos —por ejemplo, del axioma de que toda sucesión infinita puede estar bien ordenada—, que son formales pero no también lógicos.

Es esencial para el programa de Hilbert que la lógica o la metamatemática empleadas en demostrar la coherencia de un formalismo, sean más *débiles* que el formalismo cuya coherencia se demuestra. La lógica es más débil que el

12 Véase “Intuí tionistísche Betrachtungen über den Formalismus”, *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss.,* Berlín, 1927, pp. 48-52. Reproducido también en parte en Becker, *Grundlagen dex Mathematik,* Fri burgo, Munich, 1954, p. 333.

esto ya no es imaginar. En realidad, en efecto, podemos imaginar tan poco *en principio,* como percibir (o intuir) en principio. En ambos casos el término señala la transición de la aprehensión de elementos particulares a lá' afirmación lógicamente posible, pero perceptivamente (e intuitivamente) vacía, de proposiciones generales.

El hecho de que el intuicionismo haga más que registrar lo que se encuentra o es construible ya sea en la intuición o la percepción (aquello que está *nach anschaulicher Beschaffenheit bestimmt* [determinado por su constitución intuitiva]) , fue objetado por Hilbert y Bernays en el primer volumen —pregodeliano— de su tratado.[13] Por otra parte, si objetamos el empleo intuicionista de la negación y la doble negación por cuanto implica que las construcciones no realizables son intuitivamente tan claras como las realizables, entonces la misma objeción precisamente puede oponerse razonablemente a las sucesiones de prosecución infinita.

Hay que distinguir estrictamente entre la filosofía intuicionista de la matemática y la matemática intuicionista misma. Los argumentos aducidos aquí en contra de la posición intuicionista se dirigen únicamente contra su filosofía y, en particular, contra la pretensión de que la matemática intuicionista no es solamente una entre muchas otras alternativas posibles, sino la única respaldada por construcciones evidentes en sí mismas. En forma análoga, los argumentos en pro o en contra de la filosofía de la geometría de Kant —su singularización de la geometría de Euclides como la única respaldada por la intuición y por la construcción intuitiva— no afectan la cuestión de las ventajas o los inconvenientes de la geometría euclidiana.

Es probable, en efecto, que la matemática intuicionista conforme al programa de Brouwer siga prosperando, tanto si sus tesis se aceptan o no como intuiciones directamente evidentes. Son muchos los matemáticos que están profundamente interesados en sus problemas, sin estar por ello interesados en forma evidente en su condición privilegiada. La creencia en el carácter satisfactorio del programa intuicionista no ha sido afectada. Ya no sigue siendo posible

13 *Op. cit.,* vol. *I,* p. 43.

tuición de BroUwer sea una intuición cierta. Y los que no la póseen no pueden hacer más que esperar a que les venga, o bien, alternativamente, hasta que vengan más pruebas que demuestren, contrariamente a lo que se espera, que la diferencia de fuerza entre sistemas metamatemáticos dados, por una parte, y los formalismos cuya coherencia se proponen demostrar, por la otra, es o meramente aparente u omitible.

No todo el mundo está dispuesto a conceder la existencia de una facultad de intuición que, si bien distinta a la percepción sensible, aprehenda objetos particulares como dados. Son muchos los filósofos que consideran que la introspección no revela la presencia de facultad intuitiva alguna del tipo kantiano o brouweriano. Negar tal facultad equivale a negar implícitamente el punto de vista positivo de Brouwer de que existen potencialmente infinitos —sucesiones de prosecución infinita—, en el sentido de que son intuitivamente construibles. La cuestión no está aquí en decidir si existen o no, o en qué sentido, sucesiones susceptibles de prosecución infinita, sino en demostrar que una afirmación al respecto *no es* un informe de una experiencia intersubjetiva y directamente evidente. Informes contradictorios sobre la misma experiencia íntersubjetiva bastan siempre para demostrar que ésta no es directamente evidente. Y precisamente la pretendida autoevidencia intuitiva de tales sucesiones se encuentra en la base del postulado de la concepción intuicionista del infinito, de que aquélla es la única "real" o "inteligible", y no más bien una de entre un número de alternativas matemáticamente iguales, aunque tal vez diversamente adecuadas a propósitos diversos.

El finitista estricto negará la existencia (construible) de sucesiones de prosecución infinita de modo muy parecido a como los intuicionistas niegan la existencia de los infinitos reales. Las sucesiones de prosecución *infinita,* objetará, rebasan, a diferencia de las de prosecución finita, la capacidad humana de aprehensión de lo particular. En efecto, podemos imaginar el proceso de añadir un trazo a otrQ trazo hasta cierto punto, pero llega un momento en que la percepción y la intuición ya no siguen. E imaginar "en principio" que el proceso se prosigue sin cesar,

Al referirnos a la teoría de las funciones recursivas, vimos cómo ha conferido precisión a la noción de la prueba constructiva en términos de tales funciones. En este contexto hemos de mencionar también la interpretación de Kleene de la matemática intuicionista en términos de lo que él llama la realizabilidad recursiva. Propone esta noción como un análisis teórico-numérico preciso de la noción menos precisa de ser un teorema matemático intuicionista.[15]

Creo que es correcto decir —y esto es sobre todo un resultado de las críticas intuicionistas de las concepciones anteriores y de sus resultados matemáticos— que un escepticismo general a propósito de los teoremas de existencia no calificados, y no respaldados por construcción alguna, se está extendiendo hasta los ámbitos más remotos de la matemática. Se requiere por lo regular una justificación más o menos precisa de los teoremas de existencia, o se la considera cuando menos como deseable, siempre que estos teoremas se refieren a números reales o a propiedades de estos números. Los días de la aplicación ilimitada y despreocupada de la ley del tercero excluido, y del conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto infinito, parecen haber pasado a la historia. En una medida menor, cabe decir lo mismo de la práctica de tratar las antinomias con remedios *ad hoc,* tales como la teoría de los tipos.

Un sistema que si bien no es tan radical como el intuicionismo muestra, con todo, su influencia en muchos aspectos, fue construido por Weyl en 1918.[16] Weyl acepta la ley del tercero excluido para los números naturales (y los números racionales), pero no, en cambio, para los números reales o las propiedades de éstos. Para él, la fundamentación absoluta de todas las construcciones matemáticas es "la sucesión infinita de los números naturales y el concepto de existencia a ellos referido".[17]

Los números naturales en su totalidad infinita y las

[15] Kleene, *op. cit.,* pp. 501 55.

[16] Véase *Das Koniinuutn,* Gottingen, 1918 y 1932, asi como trabajos posteriores, especialmente "Über <lie nene Grundlagenkrise der Mathematik", *Math. Zeitschrifl,* 1921, vol. 25; reproducido en Becker, *Grundlagen der Mathematik.*

[17] *Kontinuwn,* p. 37.

deducir la “matemática” de la “lógica" a la manera de Frege, o demostrar por los métodos finitos de Hilbert que la matemática clásica es coherente. Pero sigue siendo posible, en cambio, proseguir la matemática intuicionista tal como fue originalmente concebida.

4] INTERPELACIONES ENTRE EL FORMALISMO Y EL INTUICIONISMO

Los críticos del intuicionismo le objetan cierta vaguedad en la delimitación de la materia de estudio y en los métodos de la matemática. Objetan asimismo la conexión íntima de la matemática intuicionista con la filosofía intuicionista. Sin embargo, la matemática es totalmente distinta de la filosofía, y las pruebas matemáticas intuicionistas poseen exactamente el mismo “rigor" que las no-intuicionistas encontradas en las obras de los matemáticos clásicos. Por otra parte, puede mostrarse, bajo ciertas interpretaciones, que las codificaciones de la matemática intuicionista son isomorfas con sistemas formales.[14] La función principal de la filosofía intuicionista está, según vimos, en establecer una posición privilegiada para la matemática intuicionista. Se la considera, en efecto, como el único sistema de matemática "real”, “apropiado" o "inteligible”, entre un número cada vez mayor de competidores.

Sin embargo, especialmente en su insistencia de que la existencia matemática es constructibilidad, junto con su repudio de la ley del tercero excluido y de los infinito[1]? reales, la filosofía intuicionista ha ejercido una gran influencia en el desarrollo tanto de la matemática como de la filosofía de ésta. Nos encontramos a menudo con el deseo de combinar las intenciones intuicionistas con la precisión formalista. Como consecuencia de esta acción mutua, la división estricta de los matemáticos y los filósofos en logicistas, formalistas e intuicionistas, que nunca fue muy real, excepto para los protagonistas de estos movimientos, es probable que pierda mucho de su valor y se convierta en poco más que un artificio pedagógico.

14 La cuestión ha sido examinada por Gódel, Kleene y otros. Véase Kleene, *op. cit.*

ponde una relación G(x, x\ . . . ; X), que significa: *x}* *x'}* . . . , están una con respecto a la otra en la relación *X*. *X* es aquí una relación variable *(unbestimmte)* de categoría A, y las variables x, x', . . . se refieren a la misma categoría de objetos que las variables de las relaciones *X* de la categoría *K*. Estas relaciones G se utilizan juntamente con la relación *F* de primer nivel (la relación que todo entero tiene con su sucesor y únicamente con él) como material inicial (para el proceso constructivo) ." [19]

No voy a repetir las ocho reglas de Weyl para la construcción de nuevas propiedades matemáticas a partir de la reserva de las que se dispone del primer nivel. Sin embargo, dos puntos generales requieren mención. Primero, la estratificación en niveles antes descrita es destruida por una de sus reglas. Es ésta el llamado principio de sustitución, que gobierna la saturación de funciones preposicionales, tales como *R(X,Y)*, en donde los lugares no saturados *(Leerstellen)* se refieren a conjuntos de nivel superior a I y que, bajo ciertas condiciones determinadas, permiten la construcción de conjuntos de nivel inferior a partir de los de nivel superior. Y segundo, si *R(x,y)* es una proposición funcional, la cuantificación existencial —(Hx)7?(x,y)— sólo está permitida *si* el lugar no saturado que ha de cuantificarse se refiere a un número natural o a una sucesión ordenada de números naturales. [20]

Al admitirse únicamente conjuntos construidos de una manera determinada, restringimos también, por supuesto, la noción muy general de función que se ha venido utilizando desde Dirichlet y Cantor. Para demostrar esto, voy a dar primero el concepto general de función y citar dos comentarios al respecto, uno de Hausdorff, que lo acepta sin reserva, y otro de Weyl, que lo rechaza.

Podemos empezar definiendo una relación como un conjunto de pares ordenados, de tríadas, . . . , de grupos de *n* elementos. Supongamos que *R* es un conjunto de pares ordenados y que *(a,b)* es uno de ellos. Dos pares ordenados, digamos *(a,*5) y (c,d), son iguales si y sólo si sus primeros y segundos miembros son respectivamente iguales,

19 Becker, *op. cit.*, p. 341.
20 *Kontinuum*, p. 29.

proposiciones en el sentido de que un número es el sucesor inmediato de otro, o que dos símbolos representan el mismo número, constituyen la base de la construcción matemática. En esto concuerda Weyl con el procedimiento clásico del análisis matemático. Concuerda asimismo con el diagnóstico de Russell de que las definiciones de ciertos conceptos de la teoría clásica de los conjuntos, especialmente el concepto de número real, se basan en un círculo vicioso (véase p. 53, *supra)*. Este defecto, insiste Weyl, debe erradicarse, no por prescripciones o prohibiciones *ad hoc,* sino por la formulación explícita de principios para la construcción efectiva de entidades matemáticas. La mera definición de una categoría de objetos no establece en absoluto "que tiene sentido hablar de los objetos que caen bajo ella como de una totalidad determinada e idealmente completa". No establece, en efecto, que la categoría esté "denotativamente definida" *(umfangsdefinit).*[18]

El contenido positivo del carácter denotativamente definido lo determina Weyl, por una parte, por medio de una estratificación *provisional* de propiedades y objetos en niveles, e indicando, por otra parte, las reglas para la construcción de propiedades y objetos de nivel segundo o superior, a partir de los del nivel primero.

"Hay una sola categoría fundamental de objetos —dice—, la de los números naturales, y además . . .relaciones uñarías, binarias, ternarias. . . entre tales números. Todas éstas las designamos como relaciones del primer nivel; la categoría a la que una de estas relaciones pertenece está perfectamente determinada por el número de variables *(Unbestimmten)* que implica." A continuación tenemos el segundo nivel. "Las relaciones del segundo nivel son relaciones cuyas variables son en parte números naturales arbitrarios y, en parte, relaciones arbitrarias del primer nivel. La categoría a la que pertenece una de estas relaciones de segundo nivel está determinada por el número de sus variables y por las categorías de objetos a los que cada una de sus variables se refiere. Las relaciones de tercer nivel son aquellas en las que ocurren relaciones variables del segundo nivel, etc. A toda categoría *K* de relaciones corres-

18 Becker, *op. cit.,* p. 339.

ral y general del análisis, sino también desde el punto de vista del papel que el concepto de función ha de desempeñar en la adquisición de los conocimientos de las leyes que rigen los procesos materiales. Renunciar a semejante construcción por completo, como el análisis moderno, a juzgar por la forma verbal de sus definiciones, pretende hacer (aunque, por fortuna, también aquí el decir y el hacer son muy distintos), significaría extraviarse por completo en la niebla. . ."[22]

Weyl no pretende que su sistema sea la única fundamentación posible del análisis. Pero sostiene, en cambio, que su reconstrucción está libre de círculos viciosos y de postulados "antinaturales", y que su estructura es transparente y lo bastante resistente como para adaptarse, en su formulación matemática, a las leyes de la naturaleza tal como han sido descubiertas por la física contemporánea. Entre el continuo de la percepción, por una parte, y el continuo de los números reales construidos de acuerdo con los principios de Weyl, por la otra, sigue subsistiendo un "profundo abismo".[23] Considera que la naturaleza del continuo de la percepción —o más exactamente de la percepción o la intuición puras— es revelada más de cerca por la matemática de Brouwer, de la que se convirtió en uno de los exponentes más distinguidos.[24]

Otro sistema importante y altamente original, que muestra la influencia del formalismo, de sus críticos intuicionistas y de la obra de Weyl, es la lógica operativa de Lorenzen[25]

La materia de estudio de la matemática operativa son cálculos o sistemas formales en el sentido de Curry (véase p. 110). Por lo que se refiere a los métodos de prueba y los métodos de la construcción de objetos matemáticos, Lorenzen se remonta hasta cierto punto a la obra inicial de Weyl. Su propósito está en proporcionar —para servirnos nuevamente de las palabras de Weyl— una "construcción lógicamente natural y general del análisis" o, en sus pro-

22 *Kontinuum,* p. 55.
23 *Kontinuum,* p. 71.
24 Véase, por ejemplo, Becker, p. 344.
25 Véase *Einführung in die operative Logik und Mathematik,* Berlín, 1955.

esto es, si *a* ~ *c* y *b* — *d.* Esto implica, en particular, que (a,¿9≠ (¿>,a) excepto en el caso especial en que *a* = *b.* El conjunto de todos los primeros miembros de los pares ordenados de *R* se designa como el “dominio*', y el conjunto de todos los segundos miembros como el “ámbito’’ de *R* (facilita la comprensión el pensar en los primeros miembros como en las coordenadas *x,* *y* en los segundos como en las coordenadas y) .

En general, todo primer miembro (toda coordenada x) puede corresponder a uno o varios segundos miembros (coordenadas y) , y todo segundo miembro puede corresponder a uno o varios de los primeros. Sin embargo, si la correspondencia es tal que a cada segundo miembro corresden uno o más miembros primeros, pero que a cada primer miembro *sólo* corresponda *un* segundo miembro, entonces la correspondencia es una función “de” (o “en”) el conjunto de primeros miembros “a” el conjunto de los miembros segundos. Y si, además, a cada segundo miembro sólo corresponde un solo miembro primero, entonces la función es biúnica, o una correspondencia biunívoca. La gráfica constituye un análogo visual adecuado de una función, tanto si ésta es biúnica como si no lo es. La definición de conjuntos de tríadas, etc., y de funciones correspondientes procede en la misma forma.

Al comentar esta noción de función, Hausdorff insiste en que no importa en absoluto por medio de cuál regla la correspondencia entre los primeros y los segundos miembros se establezca. Es “indiferente —dice— que esta regla esté determinada por ‘expresiones analíticas’ o en cualquier otra forma, y es indiferente que nuestros conocimientos o los medios a nuestra disposición permitan o no la determinación efectiva de *f (a)* para todo *a* particular.”[21]

La noción general de función tal como se acaba de describir ha de abandonarse en la matemática de Weyl. He aquí su apreciación de la situación: "El desarrollo moderno de la matemática ha conducido a la inteligencia de que los principios constructivos algebraicos especiales a partir de los cuales procedía el análisis anterior son demasiado estrechos, no sólo para una construcción lógico-natu-

21 *Kontinuum,* p. 16.

que es enumerable en un nivel podrá ser no-enumerable en otro. (El carácter relativo de la noción de enumerabilidad lo había subrayado Skolem ya en 1922.)

Si olvidamos por un momento las posiciones filosóficas generales que, cada una a su manera, han inspirado las diversas reconstrucciones de la matemática clásica, y olvidamos también por un momento la cuestión de si todos los sistemas matemáticos que han sido construidos hasta el presente tienen o no un núcleo común o cualesquiera rasgos comunes susceptibles de distinguirlos específicamente como proposiciones o teorías de matemática, podremos vernos tentados a resumir la situación más o menos como sigue: diversos autores se han encontrado descontentos con la matemática clásica a causa de sus antinomias, a causa de su falta de rigor, o a causa de tal o cual defecto. Han formulado diversos *desiderata* que consideraban debería reunir una teoría matemática, y han empezado a remplazar la matemática anterior por un sistema conforme a dichos *desiderata,* conservando debidamente de aquélla tanto como podía preservarse de acuerdo con éstos. En algunas ocasiones ha resultado necesario aflojar los requisitos iniciales, como en el caso del logicismo y el formalismo, en tanto que en otras ocasiones se ha hecho necesario sacrificar la matemática anterior en mayor grado, renunciando a partes de ella que se habían considerado susceptibles de ser conservadas.

Podemos suponer que los *desiderata* de cada matemático (en la formación de conceptos y proposiciones y en la prueba matemática) han sido satisfechos por él, en lo posible, o considerados por él como susceptibles de serlo por otro matemático más competente. Y así, si bien olvidando nuestro interés filosófico, bien podríamos declararnos de acuerdo con que, como resultado final, se han concebido muchos nuevos sistemas de matemática y se han proporcionado nuevos fundamentos a muchas teorías anteriores. La perspectiva es sumamente tranquilizadora:

"There are níne and sixty ways of constructing tribal lays,
And —every—single—one—of—them—is—right !" •

• "Hay nueve y sesenta maneras de componer layes tribales,
¡y—cada—una—de—ellas—es—correcta!"

pías palabras, en no servirse de “prohibición innecesaria o arbitraria alguna”, de modo que la “estructura metódica se deje lo más amplia posible”.[26] De ahí, por consiguiente, que no requiera que todas las proposiciones sean efectiva o intuicionistamente ciertas; lo que exige es, antes bien, que sean definidas, esto es, no denotativamente definidas, sino “demostrativamente definidas” *(beweisdefinit).*

Si la cifra *x* es derivable en un cálculo *K* —por ejemplo, en el cálculo preposicional o en una partida de ajedrez jugada por una persona que sólo está interesada en encontrar qué posiciones pueden producirse en ella—, entonces la proposición “*x* es derivable en *K*” es (demostrativamente) definida. Y así lo es también la proposición “*x* no es derivable en *K*”, porque sabemos a qué equivale derivar *x* en *K,* esto es, a refutar la proposición. Una regla *R* es “admisible” en *K* si, después de su adición, no hay más cifras derivables en *K* que anteriormente. Así, pues, la admisibilidad se define en términos de derivabilidad e inderivabilidad, y es “definida”. La definición de la definidad” es ésta: “i] Toda proposición que es decidíble por operaciones esquemáticas ha de ser definida, ii] Si para una proposición está determinado un procedimiento definido de demostración o refutación *(ein definiter Beweis— oder Widerlegungsbegriff),* entonces la propia proposición ha de ser definida y, más exactamente, definida demostrativa o refutativamente”.[27]

No es posible resumir aquí la obra de Lorenzen. Pero conv’ene observar, entre otras cosas, que logra remplazar los conjuntos de enteros de Cantor y los conjuntos de orden superior por una noción demostrativamente definida, noción que utiliza en la reconstrucción de la aritmética de los números reales y de la mayor parte del análisis clásico. El medio principal para lograrlo consiste en una estratificación de niveles de lenguaje que recuerda la de Weyl, si bien la estratificación ya no sigue siendo aquí provisional. Una de las consecuencias más impresionantes de su procedimiento es que la diferencia entre conjuntos enumerables y no-enumerables se hace sólo relativa. Un conjunto

26 *Op. cit.,* **p. 5.**
27 *Op. cit.,* **p. 6.**

CAPÍTULO OCTAVO

LA NATURALEZA DE LA MATEMÁTICA PURA Y APLICADA

En los capítulos precedentes nos hemos encontrado con respuestas diversas y mutuamente incompatibles a la pregunta "¿Qué es la matemática pura?" Es lógica, dice el logicista puro; es el manejo de las cifras en los cálculos, dice el formalista; construcciones en el medio de la intuición temporal, dice el intuicionista; proposiciones que abandonamos menos fácilmente que algunas proposiciones de la lógica y mucho menos fácilmente que las proposiciones empíricas, dice el pragmatista lógico. Y hay además posiciones intermedias. El progreso de la lógica matemática, desde Boole y Frege, no ha aportado gran diferencia a la prosecución de las disputas filosóficas acerca de la naturaleza de la matemática.

Es posible que la cuestión no admita una respuesta única y simple y que nos induzca a error sugiriéndonos respuestas tales. En forma análoga, la pregunta "¿Por qué obedece la gente a la ley?" sugiere que hay una respuesta única y simple, por ejemplo, "por consentimiento", "por temor", "por costumbre", cada una de las cuales cobra dignidad con fundamento en una teoría altisonante dt la obligación política. Se ha sugerido que la respuesta a esta última pregunta era la de "Por toda clase de motivos diversos", y cabría sugerir igualmente que la respuesta a la pregunta "¿Qué es la matemática pura?" es: "Toda clase de cosas diversas".

Una variante más sutil de esta misma burda respuesta ha sido dada, de hecho, por Wittgenstein, por ejemplo, en el siguiente pasaje que examina la semejanza que diversos juegos, "juegos de lenguaje" y, en particular, "juegos de lenguaje" matemáticos, tienen unos con otros: "Y el resultado de este examen es: vemos una red de semejanzas que

La matemática, podríamos pues concluir, es aquello que hacen todos los matemáticos; los cimientos de la matemática son aquellos en que algunos de ellos trabajan, y la filosofía de la matemática consiste simplemente en informar sobre estas actividades con la humildad debida. Sin embargo, esta humildad no siempre la han manifestado los filósofos, y no será imitada aquí. En el capítulo que falta, trataré de esbozar una filosofía de la matemática pura y aplicada, examinando la relación de la matemática con la percepción; y terminaré con algunos breves comentarios acerca de las relaciones de la matemática y la filosofía. Hasta cierto punto, los capítulos críticos anteriores (in, v y vnj han preparado el camino para el que sigue.

"La investigación de los fundamentos de la matemática ha revelado dos cosas. Primero, que una cierta clase de cognición puramente perceptiva *(rein-anschaulich)* ha de tomarse como punto de partida para la matemática y que, de hecho, no podemos desarrollar siquiera la lógica como la teoría de los juicios y las inferencias, sin recurrir hasta cierto punto a la cognición perceptiva. A lo que aquí se alude es a la representación perceptible de arreglos discretos *(des Diskreten),* de los que extraemos nuestras representaciones combinatorias más primitivas y, en particular, la de sucesión. La aritmética constructiva se desarrolla de acuerdo con esta cognición perceptiva elemental. Vemos luego, en segundo lugar, que la aritmética costructiva no basta para la matemática cuantitativa *(Grossenlehre),* sino que para este fin hemos de añadir determinados conceptos definidos que se refieran a totalidades de objetos matemáticos *(die sich auf die Totalitat von Inbegriffen mathemátischer Objekte beziehen),* por ejemplo, la totalidad de los números y la totalidad de los conjuntos de números."

Así, pues, una teoría matemática consta de un núcleo duro de datos y construcciones perceptibles o, según Bernays se inclina a pensarlo, intuitivos —en el sentido kantiano—, rodeados en algunos casos de varias idealizaciones no-perceptivas que se refieren a totalidades ideales.

He sostenido más arriba que una "idealización" de la percepción se halla implícita en el pensamiento matemático aun antes de la introducción de totalidades infinitas. (Véase especialmente pp. 71 ss., y pp. 123 *ss.).* Inclusive nociones tan elementales como las de unidades *matemáticas* susceptibles de adicionarse *matemáticamente* —ya se definan las unidades y la operación según la manera de Frege, de Hilbert o de Brouwer— han de distinguirse de las nociones elementales correspondientes de unidades *empíricas* susceptibles de adicionarse *empíricamente.* Los conceptos matemáticos son exactos, esto es, no admiten casos-límite o casos neutros, en tanto que los conceptos empíricos co-

Schule in ihren Verháltnis zum heutigen Stand der Wissenachaft", en *Abhandtungen der Fries'schen Schule, Neue Folge,* Güttingen, 1930, vol. v_f 2.

coinciden y se cruzan: en ocasiones semejanzas generales, y en ocasiones semejanzas de detalle.

"No encuentro mejor expresión para caracterizar estas semejanzas que la de 'semejanzas de familia', porque las diversas semejanzas entre los miembros de una familia, estatura, rasgos, color de los ojos, porte, temperamento, etc., coinciden y se cruzan en la misma forma. Y yo diré: los 'juegos' forman una familia.

"Y las clases de números, por ejemplo, forman una familia del mismo modo. ¿Por qué llamamos a algo 'número'? Tal vez porque tiene una relación —directa— con varias cosas que hasta aquí hemos llamado número, y cabe acaso decir que esto le confiere una relación indirecta con otras cosas que designamos del mismo modo. Y extendemos nuestro concepto de número, del mismo modo que* al hilar un hilo entretejemos una fibra con otra. Y la fuerza del hilo no reside en el hecho de que una fibra corre a todo su largo, sino en el entretejido de muchas fibras.

"Sin embargo, si alguien quiere decir: 'Hay algo común en todas estas construcciones, esto es, la disyunción de todas sus propiedades comunes', yo replicaría: 'Esto no es más que un juego de palabras. Lo mismo podríamos decir: algo corre a todo lo largo del hilo, esto es, el entretejido continuo de dichas fibras'." [1]

Aquí Wittgenstein abandona la búsqueda de cualquier característica que distinga las proposiciones de la matemática pura de cualesquiera otras proposiciones. Con todo, podríamos estar de acuerdo con él y tratar de encontrar, sin embargo, un *núcleo común* en todas las teorías de la matemática pura: algún supuesto o alguna construcción que pudiera discernirse en todas ellas, completamente aparte de la "red complicada de semejanzas que coinciden y se cruzan". Este método ha sido seguido, por ejemplo, por Bernays y, según éste señala, por Fríes antes que él, cuya filosofía se relaciona íntimamente, por supuesto, con la de Kant. El siguiente pasaje muestra muchas semejanzas con pasajes de las *Grundlagen der Mathematik,* de Hilbert y Bernays. [2]

x *Philosophical Investigations,* traducción de G. E. M, Ans* combe, Oxford, 1953, §§ 66, 67-

[2] Está tomado de [4]*Die Grundgedanken der Fries'schen

ración de las relaciones lógicas entre conceptos exactos, entre conceptos inexactos, y entre conceptos exactos e inexactos. Por consiguiente, empezaré tratando de exponer algunas características simples de la lógica de los conceptos exactos *e inexactos.*

Por lo que se refiere a la matemática pura, me propongo sostener que los conceptos y las proposiciones de cualquier teoría matemática (existente) son, en un sentido preciso del término, puramente exactos, que están desconectados de la percepción, y que, en la medida en que la teoría matemática contiene enunciados existenciales, éstos, a diferencia de los enunciados empíricos y teológicos de contenido existencial, no son únicos. Y por lo que se refiere a la matemática aplicada, demostraré, en términos generales, que la "aplicación" de la matemática pura consiste en intercambiar proposiciones perceptibles y puramente exactas, al servicio de algún propósito determinado.

Después de aclarado el sentido de estas tesis y de argumentar en su favor, terminaré con un breve examen de la relación entre la matemática y la filosofía.

I] CONCEPTOS EXACTOS E INEXACTOS

En relación con nuestro objeto no es necesario enumerar las condiciones —suponiendo que esta enumeración sea posible— bajo las cuales una cosa puede utilizarse como signo y, más concretamente, como concepto (atributo, predicado, función preposicional, etc.). Bastarán al respecto algunas observaciones generales.[5]

Una cosa sólo se emplea como signo o, en forma más breve y menos precisa, es un signo, si pueden distinguirse usos suyos correctos e incorrectos. Esto significa que ha de ser posible en principio formular reglas para su empleo, que sean susceptibles de seguirse o violarse por la conducta de una persona a la que pueda imputarse la intención de conformarse a dichas reglas. Los motivos de la imputación podrán ser acaso tales que nos permitan decir ya sea que la persona tiene plena conciencia de su intención, o que so-

[5] Véase un tratamiento más completo en *Conceptual Thinking,* Cambridge, 1955; Dover Publications, Nueva York, 1959.

Respondientes son inexactos. El hecho de que la exactitud de los conceptos, las proposiciones y las teorías matemáticas constituya un rasgo importante que distingue los conceptos matemáticos de los empíricos, esto, por supuesto, ya lo vio claramente Platón, y en tiempos más recientes —cuando menos por lo que se refiere a la geometría— Félix Klein, entre otros. El hecho de que, sea cierto de los conceptos empíricos lo que fuere, los conceptos matemáticos son exactos, esto lo ha enunciado explícitamente Frege[3] y, por lo que yo sé, ha sido aceptado por todos los filósofos matemáticos y por todos los matemáticos. Para no dar más que un ejemplo de una obra matemática escogida al azar: "Todo lo que requerimos para que un conjunto *E* esté definido —dice el autor de un monografía conocida sobre la integral de Lebesgue— es que podamos decir de un objeto cualquiera si forma o no parte de E."[4]

No creo que los filósofos matemáticos hayan apreciado la importancia de la diferencia entre conceptos exactos e inexactos en relación con la cuestión de la naturaleza de la matemática pura y la aplicada. Esto se debe principalmente a que no se ha prestado a la lógica de los conceptos inexactos la atención que merece. Esta negligencia puede deberse a su vez al carácter confuso de los conceptos inexactos, que admiten rnsos-límite, con expresiones ambiguas u oscuras, cuyo significado o cuyo uso no está determinado claramente. Sin una visión más clara de las relaciones lógicas entre los conceptos inexactos, la tesis de que los conceptos matemáticos son idealizaciones de conceptos perceptibles (inexactos) ha de seguir siendo muy nebulosa. Idealizar consiste en idealizar algo en otro algo, y a menos que conozcamos el punto de partida tan bien como el producto acabado de la operación, ésta no puede comprenderse claramente en sí misma.

El objeto del presente capítulo es el de esbozar una filosofía de la matemática pura y aplicada hasta el punto de que sus tesis principales puedan captarse y compararse con otras posiciones filosóficas. Sus rasgos más característicos se apoyan en consecuencias extraídas de la conside-

3 *Grundgesetze,* vol. 2, § 56.
4 *The Lebesgue Integral,* J. C. Burkill, Cambridge, 1951.

de *U;* b] el caso en que la negación de *U* a algún objeto será conforme a la regla, en tanto que la atribución la violaría, en cuyo caso diremos que el objeto es Un candidato negativo a *U* y, de la persona' que hace la atribución, que es un caso negativo de *U;* c] el caso en que tanto la atribución como la negación de *U* a un objeto sean conformes a r, en cuyo caso el objeto es un candidato neutral a *U.* En cuanto a la persona, la que atribuye *V* al objeto es un caso positivo, y la que se lo niega, es un caso negativo de U.

ii] La segunda condición se refiere a la naturaleza de los candidatos neutrales al concepto inexacto *U. Si definimos* un concepto, digamos P, requiriendo que los candidatos neutros a U sean candidatos positivos de F, éste tendrá a su vez candidatos positivos, negativos y neutros. (Ejemplo: pongamos que U es el concepto inexacto “verde”, y *V* el concepto que “tiene los candidatos neutros a ‘verde’ como candidatos positivos seguros”. *V* es inexacto.) Unas pequeñas observaciones acerca de esta definición la protegerán contra interpretaciones erróneas. (Nada versará en este capítulo sobre la segunda condición, la cual, sin embargo, parece ser importante para una comprensión más profunda de las nociones que aquí se introducen.)

El hecho de que un concepto sea inexacto, o para este caso exacto, es una característica del concepto o de las reglas que lo rigen; no depende, en efecto, del inventario del mundo. La posibilidad de candidatos neutros, y no su concurrencia real, caracteriza a un concepto como inexacto. Sin embargo, la mayoría de las proposiciones que son importantes para nuestro propósito podrían remplazarse por otras en las que la “inexactitud del concepto” se define en términos de candidatos reales neutros al mismo y no de candidatos posibles. Por consiguiente, las controversias alrededor de la cuestión —no siempre muy claras—, entre los lógicos “intensionales” y "extensionales”, pueden evitarse.

Un concepto sería inexacto si tanto su atribución como su negación a algún objeto fueran conformes a la regla que lo rige. El hecho de que no se sepa o no pueda saberse si un concepto se atribuye o se niega acertadamente a un objeto no lo hace inexacto. En particular, un concepto

lamente se comporta como si la tuviera. Entre estos dos extremos se sitúan una gran diversidad de casos intermedios. Todas estas posibilidades quedarán incluidas diciendo que la persona ha adoptado las reglas y, cuando no haya necesidad de señalar concretamente a la persona, que las reglas rigen el signo.

Un signo solamente es un concepto si las reglas que lo rigen comprenden una regla de referencia, esto es, una regla para su atribución o negación a objetos en el sentido amplio del vocablo, que comprende datos sensibles, cosas físicas, acontecimientos, colores, números, dibujos geométricos y, en una palabra, cualquier cosa susceptible de que se le atribuyan signos. (Las reglas de la mayoría de los juegos, por ejemplo, el juego de ajedrez, *no son* reglas que rijan conceptos.) Vale la pena insistir en que el empleo del término "objeto", y en forma correspondiente el empleo del término "concepto", es compatible —y se supone que lo es— con toda clase de convicciones ontológicas acerca de cuáles objetos son "reales" y cuáles no. Semejantes ontologías suelen aplicarse, aunque no descubrirse, según tuvimos ocasión de observarlo al comparar el nominalismo de Russell con el realismo de Frege en relación con el número, medíante una distinción adecuada entre símbolos completos (categotemáticos, autosemánticos) e incompletos (sincategoremáticos, sinsemánticos), y lo que sigue puede concillarse fácilmente con cualquier ontología y teoría subsiguiente de los símbolos incompletos y de sus definiciones contextúales apropiadas. Así, pues, un sistema conceptual ha de contener reglas que rijan conceptos. Que esto sea también así por lo que se refiere al lenguaje, en el sentido de un "juego de lenguaje", no está claro para mí.

Una regla, digamos r, para la atribución o la negación de un signo, digamos U, la designaremos aquí como una regla inexacta de referencia, y *U* lo designaremos como concepto inexacto, si se cumplen las dos condiciones siguientes: i] La primera se refiere a los resultados posibles de asignar o negar *U* a objetos. Éstos son: a] el caso en que la atribución de *U* a algún objeto sería conforme a *r,* en tanto que la negación la violaría, en cuyo caso diremos que el objeto es un candidato positivo a U, y de la persona que hace la atribución diremos que es un caso positivo

candidatos positivos o negativos solamente, esto es, igno rando los objetos que son candidatos neutros de *U* o de F o de ambos. Esta relación la designaremos como su relación *provisional* y la pondremos entre corchetes. El segundo paso consiste en considerar las relaciones que pueden dar se si se tienen también en cuenta los candidatos neutros, separados y comunes, de *U* y *V,* así como sus posibles elecciones como casos positivos o negativos de estos con ceptos. Estas relaciones las designaremos como *finales y* las escribiremos entre llaves. (Las relaciones provisionales se encuentran, en cierto modo, antes de las elecciones, en tanto que las finales se encuentran después de éstas y representan resultados posibles de las mismas.)

Cabe distinguir las siguientes *relaciones* provisionales:

i] [U < F], esto es, la inclusión provisional de *U* en F, se define por: *U y V* tienen cuando menos un candidato positivo común, y ningún candidato positivo de *U* es un candidato negativo de *V.* [U > F] es lo mismo que [7 < Í7], y [U § F] es lo mismo que la conjunción de *\ U < V } y \ V < U] .*

ii] [Í7 | F], esto es, la exclusión provisional entre *U y V* se define por: cada concepto tiene cuando menos un candidato positivo que es candidato negativo del otro, y *U y V* no tienen candidatos positivos comunes.

iii] [U O F], esto es, el traslape provisional de *U y* F se define por: *U* y F tienen cuando menos un candidato positivo común, y cada uno de los dos conceptos tiene un candidato positivo que lo es negativo del otro.

iv] [U ? F], esto es, la indeterminación provisional entre *U y* F se define por: ninguna de las relaciones anteriores es cierta. Esta posibilidad no puede presentarse en la lógica de los conceptos exactos.

Las relaciones *finales* posibles (inclusión, exclusión, coincidencia e indeterminación finales) se definen del mismo modo que las relaciones provisionales correspondientes, con sólo remplazar los corchetes por llaves, la palabra “provi sional” por “final”, y la palabra “candidato” por la de i> caso >» .

Indagamos ahora la forma en que las relaciones provi-

cuya asignación o negación no pueda decidirse por determinados métodos permisibles no es, por esta razón, inexacto Ni tampoco la duda acerca de si ciertas reglas para la atribución o la negación de un término deberían o no adoptarse significa que el término en cuestión sea un concepto inexacto.

Por ejemplo, podríamos dudar acerca de si el empleo de la inducción transfinita está o no permitido para asegurar la coherencia de la teoría clásica de los números o, en otras palabras, si un argumento que la utilice es o no una "prueba" y establece o no un "teorema". Estos dos términos están empleados como conceptos exactos, tanto por el matemático que admite el método de la inducción trans finita como por el que lo niega. Y la duda se refiere a qué conceptos exactos de "prueba" y "teorema" deben aceptarse.[6]

Un concepto exacto no puede tener candidatos neutros. En relación con semejante concepto, la distinción entre candidatos y casos no tiene objeto, y la clásula c] de la primera condición (junto con la segunda condición) no tiene aplicación. Resulta posible definir las relaciones lógicas entre conceptos y la formación de conceptos compuestos por medio de conexivos, para conceptos exactos e inexactos simultáneamente y de tal modo que, para los conceptos exactos, estas definiciones se reduzcan a las que nos son familiares de la lógica de los conceptos exactos. En esta forma, llegaríamos a una lógica generalizada, de la que la lógica de los conceptos exactos y la de los conceptos inexactos son casos especiales. Aquí sólo se adoptan los primeros pasos en tal dirección.

Los conceptos *U* y F, cuyas relaciones lógicas nos interesan, pueden ser exactos o inexactos. Para simplificar el estudio, formulamos el supuesto razonable de que para cada concepto exacto hay un candidato positivo y uno negativo, y que para cada concepto inexacto hay además también un candidato neutro. Con objeto de distinguir entre las relaciones lógicas posibles que podrían subsistir entre *U* y *V*, conviene proceder en dos pasos. El primer paso consiste en considerar su relación con respecto a sus

[6] Véase Kleene, *op. ciL,* pp. 476 *ss.*

inclusión, y son posibles dos relaciones finales, esto es, inclusión y traslape. (En forma análoga para *U* @ P.)

v] *U* $ P, esto es, el traslape excluido de *U y V se* define por: la relación provisional entre 17 y P es de exclusión, y son posibles dos relaciones finales, esto es, exclusión y traslape.

vi] 17?P, esto es, la indeterminación entre 17 y P se define por: la relación provisional es de indeterminación. Esto implica que las relaciones finales posibles son inclusión y exclusión y, en ocasiones, traslape. (Esta última posibilidad, si bien reviste poco interés para nuestros fines inmediatos, merece consideración.)

Si *U y* P son exactos los dos, entonces solamente las relaciones i]—iii] pueden darse entre ellos, y las relaciones lógicas familiares entre conceptos exactos encuentran su lugar en el esquema más amplio. Vale la pena subrayar* que iv] no es una alternancia de i] y iii] y que v] no es una alternancia de ii] y iii].

Al definir las relaciones lógicas anteriores no se ha supuesto restricción alguna para la elección de candidatos neutros, y ni siquiera se ha prohibido la elección del mismo candidato neutro para un concepto 17 como caso a la vez positivo y negativo del mismo. Por consiguiente, la relación lógica de un concepto inexacto consigo mismo es *U* © 17, y no *U* < *U.* Porque sí un objeto es un candidato neutro de *U,* podemos elegirlo una vez como candidato positivo y otra vez como candidato negativo de *U,*

Que la relación lógica entre un concepto inexacto y su complemento no será la exclusión, podemos esperarlo también de cualquier definición natural del "complemento", que convenga tanto a] concepto exacto como al inexacto. Digamos que *U y* $\bar{U}$ son complementos uno de otro si y sólo sí todo candidato positivo de uno es un candidato negativo del otro, cada candidato negativo de uno es un candidato positivo del otro y cada candidato neutro de uno es candidato neutro del otro. Luego la relación lógica entre un concepto inexacto 17 y su complemento $\bar{17}$ es *U* Φ $\bar{U}$ *y* no 17|?7.

La libertad de escoger candidatos neutros para un con-

sionales pueden cambiarse eligiendo los candidatos neutros separados o comunes para *U* *y* P, si los hay, cual casos positivos o negativos de dichos conceptos. Obviamente, un traslape provisional no puede cambiarse en una relación distinta. Si tenemos [*U* ○ *V*], hemos de tener {*U* ○ *V*}. Tampoco la inclusión provisional puede convertirse en exclusión final y viceversa. Esto es, si [U < *V],* entonces, independientemente de cuáles candidatos neutros haya disponibles para elección como casos positivos o negativos de *U* o *V,* no podemos tener jamás *]U* | P|-, y si [17| P], no podemos tener jamás]Z7<P}-. Por otra parte, una inclusión provisional es compatible con un traslape final. Por ejemplo, si [17< *V]* (pero no también *[V* < 17]) —si x_0 es un candidato neutro común de 17 y P, y si x_0 se elige como caso positivo de *U* *y* caso negativo de *V~,* entonces -¡UOPh Y en forma análoga, una exclusión provisional *[U* | *V* es compatible con un traslape final {*U* O *V*}; por ejemplo, si x_0 es un candidato neutro común de 17 y F y se elige como caso positivo de uno de los conceptos y también como caso positivo del otro. Una indeterminación provisional es compatible con una inclusión y una exclusión finales y, en ocasiones, también con un traslape parcial final.

La distinción entre relaciones provisionales y finales puede emplearse al definir las siguientes relaciones lógicas entre dos conceptos cualesquiera —exactos o inexactos— en la siguiente forma:

i] *U* < *V,* esto es, la inclusión de 17 en *V* se define por: la relación provisional entre 17 y P es de inclusión, y la única relación final posible es también la de la inclusión. *U* > *V* *y* *U* § *V* se definen en forma análoga.

ii] *U]V,* esto es, la exclusión entre 17 y P se define por: la relación provisional entre *U* *y* *V* es la de exclusión, y la única relación final posible es también la de exclusión.

iii] *U Q V,* esto es, el traslape de 17 y P se define por; la relación provisional entre 17 y P es de traslape y la única relación final posible es también la de traslape.

iv] *U* © P, esto es, el traslape inclusivo de 17 y P se define por: la relación provisional entre *U* *y* P es dc

de conceptos inexactos ampliada por convenciones restrictivas adecuadas. No tenemos aquí necesidad alguna de seguir la cuestión más adelante.

Del mismo modo que las relaciones lógicas que son posibles entre conceptos resultan aumentadas en número considerando los conceptos inexactos además de los exactos, así también, por la misma razón, el número de las posibilidades de formar nuevos conceptos a partir de conceptos ya existentes por medio de conexivos lógicos resulta aumentado. Es deseable, una vez más, definir los conceptos compuestos de tal modo que, para los que son exactos, las definiciones se reduzcan a las familiares. Esto podría hacerse de la siguiente manera:

La suma de dos conceptos, digamos *U* y *V,* puede definirse mediante la siguiente estipulación: a] un objeto es un candidato positivo de (*U* + F) —en palabras *U* o *V*— si y sólo si es un candidato positivo de *U* o de *V;* b] es un candidato negativo de (£7+ F) si y sólo si es un candidato negativo de ambos, y c] es un candidato neutro de (*U* + F) en todos los demás casos. La definición puede extenderse fácilmente a cualquiera suma finita de conceptos y, según sea nuestra actitud, a sumas infinitas. La suma se define en términos de candidatos para los conceptos-miembros, y no en términos de casos, y es compatible con restricciones generales y especiales de la independencia de la elección de candidatos neutros para casos positivos o negativos. Si *U* y F son exactos, luego (U 4* F) es la suma familiar de conceptos exactos.

El producto (*U* . F) puede definirse como sigue: a] un objeto es un candidato positivo de (*U* . F) si y sólo si es un candidato positivo tanto de *U* como de F; b] es un candidato negativo de (*U* . F) si y sólo si es un candidato negativo de uno de ellos o de ambos, y c] es un candidato neutro de (U.F) en todos los demás casos. La definición puede extenderse fácilmente a productos de más de dos términos, y se reduce, para los conceptos exactos, a la definición habitual. Lo propio se aplica a la definición del complemento $\bar{U}$ que se dio anteriormente.

Estas definiciones generalizadas de la suma, el producto y el complemento son coherentes. Su aplicación da teoremas que. en su mayor parte, son generalizaciones obvias

cepto, como casos positivos o negativos suyos, puede estar restringida, y lo está en la mayoría de los sistemas conceptuales, por convenciones adicionales. Sin embargo, debemos poner cuidado en anotar dos puntos a su respecto. Primero, ninguna convención restrictiva elimina de los conceptos inexactos los candidatos neutros, sino que no hace más que sumarse a las reglas que rigen su elección y, por consiguiente, a las reglas que rigen los conceptos inexactos. En segundo lugar, existe una diversidad de convenciones restrictivas alternativas. Estos dos puntos se ilustran mediante los ejemplos que siguen, si bien únicamente el primero es estrictamente importante en relación con nuestro propósito presente.

Las convenciones restrictivas pueden ser generales o especiales, refiriéndose las generales a todo concepto, y las especiales a ciertos conceptos solamente. Un ejemplo de convención general es la regla en el sentido de que si un candidato neutro ha sido elegido como caso positivo (o negativo) de algún concepto *U*, no debe elegirse también como caso negativo (o positivo) del mismo. Una consecuencia obvia de esta convención es que en lugar de *U* © U, que es cierto cuando todas las elecciones son independientes de elecciones anteriores, tenemos ahora *U* < *U*, En cierto modo, pues, la convención general sobreimpone inclusión al traslape inclusivo original.

A título de ejemplo de la convención general, consideremos dos conceptos *P* y Q, digamos "verde" y "azul", que están en la relación *P* <¡>Q. Si añadimos la convención de que todo candidato neutro común que se haya elegido como caso positivo (o negativo) de uno de ellos ha de elegirse como caso negativo (positivo) del otro, el resultado es que la relación PJQ está superimpuesta a la *P* <(>Q original. La necesidad lógica de ciertos enunciados modales, tales como "Todo lo que es verde no es, necesariamente, azul", se debe al hecho de que su negación violaría alguna convención especial adoptada, restringiendo la independencia de las elecciones previas. Toda vez que las convenciones especiales son importantes solamente en cuanto a la aplicación de conceptos inexactos, la lógica de los conceptos exactos no puede tomar en cuenta tales proposiciones modales. Esto sólo puede hacerse en una lógica

A es un concepto exacto con especies inexactas, llamando a *U* una especie de F si *U* < *V* o *U* © *V.* Anotando en general el carácter exacto o inexacto no sólo de un concepto mismo, sino también de sus especies, resultan posibles algunas distinciones más sutiles. En particular se revelarán como útiles las siguientes definiciones de conceptos *puramente exactos* c *internamente inexactos.* U-n concepto es puramente exacto sí y sólo si todas sus especies son exactas. (Toda vez que un concepto es una especie de si mismo, un concepto puramente exacto es exacto.) Un concepto es internamente inexacto si y sólo si cada una de sus especies es inexacta o tiene una subespecie inexacta. Por ejemplo, el concepto aritmético "siendo un número primo" es puramente exacto; el concepto "coloreado", si bien es exacto en muchos empleos, es internamente inexacto, y el concepto "verde" es inexacto e internamente inexacto a la vez.

Si *A* es exacto, *P* inexacto, y *(A + P)* no es vacío, entonces *(A +* P) es una especie inexacta de *A* (por ejemplo, *A* — "siendo un número primo", P — "siendo adorado por los pitagóricos") . Conceptos como *P y* conceptos inexactos en general no se dan ni se admiten en los sistemas de Cantor, Frcge y sus sucesores, incluidos todos los matemáticos puros. En efecto, estos teóricos insisten, según vimos, en palabras distintas y por razones distintas, en aquel mismo rasgo de la matemática pura al que habré de referirme diciendo que sus conceptos son puramente exactos.

Las características perceptibles, que en la literatura filosófica se designan a menudo como "determinables" o "aspectos de semejanza", como "color", "forma", etc., son todas internamente inexactas. Al afirmar que dos objetos perceptibles se parecen bajo cierto aspecto, estamos aplicando conceptos internamente inexactos. Y más especialmente, si un determinado objeto perceptible ha de parecerse a otro, con respecto, por ejemplo, al determinable "coloreado", entonces los objetos han de ser candidatos positivos o neutros de una o más especies del determinable, por ejemplo, de "verde", "azul", etc. El hecho de que enunciados de semejanza con respecto a determinables supongan el empleo de conceptos inexactos bastaría por sí mismo para demostrar que la distinción entre conceptos exactos

de teoremas de la lógica exacta. Las leyes conmutativas, asociativas y distributivas son obviamente válidas. Y lo son asimismo las llamadas leyes de Morgan, por ejemplo, $\overline{Tj\ 4\text{-}\ J7} = \bar{jj} . \bar{V}$: porque, según nuestras definiciones, un objeto es un candidato positivo, negativo o neutro de $\overline{(tZ + I^7)}$ si y sólo si es respectivamente un candidato positivo, negativo o neutro de $(\bar{IZ} . \bar{E})$.

Por supuesto, podemos también introducir el "concepto nulo", 0, del que todo objeto es un candidato negativo, y su complemento absoluto, el "concepto universal", $\bar{0}$, del que todo objeto es' un candidato positivo. Si *A* es cualquier concepto *exacto,* luego por nuestra definición —y la usual— de " + " "." y "— ", $(T . \bar{T})$ representa el concepto cero, y $(A + \bar{A})$ el concepto universal. Pero esto no es así en general. Porque si *P es* algún concepto inexacto, entonces $(P . \bar{P})$ y $(P + \bar{P})$ tienen candidatos neutros, y éstos son los mismos para la suma, el producto y para cada uno de sus miembros.

En conjunto, las definiciones propuestas son conformes a los usos habituales de "o", "y" y "no". Es posible definir a la manera usual más conexivos, y podemos construir un cálculo generalizado, con una interpretación en términos de conceptos exactos e inexactos. Para nuestros propósitos presentes, las definiciones y observaciones precedentes bastan.

Los compuestos de conceptos inexactos podrán ser exactos o inexactos. Consideremos un sistema conceptual que contenga un concepto exacto *A* y conceptos inexactos P_v . . . , P_n, y que sea tai que se cumplan las siguientes condiciones: i] que todo candidato positivo de *A* sea un candidato positivo de algún P, y todo candidato negativo de *A* sea un candidato negativo de todo *P;* ii] que todo candidato neutro de algún P sea un candidato positivo de algún otro P, y iii] que los candidatos positivos y negativos de los P agoten respectivamente los candidatos positivos y negativos de los *A.* Entonces, $P_t + P_2 + \cdot\bullet . + P_n — A$, *y* la suma de los conceptos inexactos es exacta. (Ejemplo: "coloreado", del que puede suponerse exacto, y sus especies inexactas, tales como "verde", etc.).

voca entre dos conjuntos de objetos matemáticos (digamos el conjunto de los números racionales y el conjunto de los enteros), afirmamos que todo objeto que es un caso positivo de un concepto matemático (digamos "número racional") puede aparearse con algún objeto que es un caso positivo de otro concepto matemático (digamos "entero"). Los dos conjuntos de casos positivos se designan como las "extensiones" o los "rangos" de los dos conceptos exactos (funciones proposicionales, etc.). Sin embargo, en vista de sus candidatos neutros, que pueden escogerse como casos positivos o negativos de un concepto inexacto, la extensión de éste no es determinada. Como Frege lo vio claramente, las "extensiones" de dos conceptos, uno de los cuales o ambos son inexactos, no pueden ponerse en correspondencia biunívoca. Frege no admite conceptos inexactos. Trata inclusive los conceptos inexactos como si fueran exactos, esto es, como si tuvieran extensiones claramente determinadas.

La distinción entre conceptos exactos e inexactos podrá acaso parecer banal, como ya se indicó, y sin importancia filosófica. La distinción entre semejanza y correspondencia biunívoca, en cambio, no es, manifiestamente, tal. Si la segunda distinción se relaciona íntimamente con la primera, la sospecha de banalidad habrá de desaparecer, y la indagación de su importancia en relación con una comprensión de la naturaleza de la matemática pura y la aplicada difícilmente puede descartarse *a límine.*

La lógica de los conceptos inexactos y la lógica generalizada, de la que la lógica de los conceptos exactos e inexactos son casos particulares, no se ha hecho aquí más que iniciarla, esto es, exhibir las relaciones lógicas posibles entre conceptos, enunciar algunas reglas para la formación de compuestos por medio de algunos conexivos, y definir algunas nociones nuevas en términos de relaciones entre conceptos inexactos. Sin embargo, se necesitarán todavía mucha reflexión y mucha habilidad técnica para desarrollar un sistema formal satisfactorio de esta lógica, y es posible que deban practicarse cambios aun en los simples orígenes.

e inexactos no es en modo alguno banal y filosóficamente insignificante, y que la construcción de una lógica generalizada de conceptos exactos *e inexactos* vale la pena.

La conexión íntima entre la lógica de los conceptos inexactos, por una parte, y las nociones de semejanza entre objetos perceptibles y de propiedades detecminables, por la otra, puede ponerse de manifiesto de dos formas. Podemos señalar ante todo que hay un límite más allá del cual no podemos trasmitir el significado o el uso de una característica perceptiva definiéndola en términos de otros conceptos tales. El paso de *definiens* a *definiens* se interrumpirá en algún lugar, y surgirá la necesidad de haber de ejemplificar uno o más *definientia.* Trasmitir el significado de cualquier característica perceptiva, digamos *P,* equivale, entre otras cosas, a trasmitir, directa o indirectamente, una regla en el sentido de que todo aquello que se parezca a ciertos objetos y no se parezca a otros habrá de ser un caso de *P.* La formulación de semejante regla —a la que yo he designado como "regla ostensiva"— supone que la noción de semejanza entre objetos empíricos es clara. Resulta fácil demostrar que los conceptos regidos por reglas ostensivas son, entre otras cosas, inexactos.

En segundo lugar, es también posible empezar en el otro extremo considerando conceptos inexactos, su diferencia con respecto a los exactos, y las relaciones entre ellos como algo convenido, y proceder de aquí a la definición de nociones diversas de determinable y semejanza. Ambos métodos tienen sus ventajas, pero el primero es en todo caso más obvio y directo.[7]

Del mismo modo que los objetos perceptibles que se parecen han de ser candidatos positivos o neutros de conceptos *inexactos,* así los objetos matemáticos que están en una correspondencia bíunívoca han de ser candidatos positivos de conceptos *exactos.* La semejanza o similitud empírica es totalmente distinta de esta correspondencia biunívoca o similitud matemática, de la que se sirve Frege para definir el "número". Al afirmar la correspondencia biuní-

[7] He probado el primer método en *Conceptual Thinhing,* y el segundo en *Determinables and Resemblance, Proceedings of the Aristotelian Sacíety,* supl. vol. xxxin, 1959.

dicho de la matemática como ciencia de la cantidad, esto sigue siendo cierto de aquellas teorías que caen ahora bajo la definición abandonada. Y en forma análoga, si algo de lo dicho acerca de la matemática puramente exacta es cierto, esto seguirá siendo cierto inclusive si se adopta o cuando se adopte generalmente una noción más amplia que incluya la “matemática inexacta”. En todo caso, sea la matemática inexacta lo que fuere, el campo de la matemática exacta es lo bastante amplio, y seguirá siéndolo, para justificar toda atención que se le preste.

Tampoco es fácil que alguien que considere la estructura lógica de cualquier concepto susceptible de ejemplificarse en la percepción, niegue la inexactitud interna de las características perceptibles. Será útil aquí recordar que a menudo una misma palabra, por ejemplo, <triángulo>, <adición> y, según vimos, <número natural> se utiliza para diversos conceptos, esto es, para conceptos matemáticos (puramente exactos), por una parte, y para características perceptibles (internamente inexactas), por la otra; como lo será recordar también los argumentos contra su fusión en las filosofías logicista y formalista de la matemática.

Sin embargo, inclusive si por mor del argumento nos dispusiéramos a admitir características perceptibles otras que las que son internamente inexactas, aun así nos quedaría el vasto y muy interesante campo de las características perceptibles internamente inexactas. Hecha esta concesión, me considero libre de prescindir de las calificaciones de “internamente inexactas”, al hablar en adelante de características perceptibles, y de “puramente exactos”, al hablar de conceptos matemáticos.

Una precaución más contra interpretaciones erróneas: las características perceptibles son ejemplificables en la percepción. Son categorías tales, o caen bajo ellas, como “siendo una impresión de los sentidos”, “siendo un aspecto de un objeto físico”, etc. Que estas categorías estén o no legitimadas, esto es una cuestión metafísica, y nuestro empleo de las “características perceptibles” no pretende implicar posición alguna ya sea realista, fenomenalista o metafísica.

Si los conceptos matemáticos son puramente exactos y las características perceptibles son internamente inexactas.

2] LA MATEMÁTICA PURA DESCONECTADA DE LA PERCEPCIÓN

En última instancia, toda matemática puede presentarse en términos de dos nociones, a saber, la de un conjunto o rango de un concepto *exacto* (función preposicional, etc.) y la de una función (gráfica, etc.) definida en términos de "conjunto". Esto es cierto tanto de la matemática clásica como de sus reconstrucciones posteriores, que hemos examinado en los capítulos precedentes. En los sistemas reconstruidos, las nociones de conjunto y función no se abandonan, sino que sólo se las restringe mediante diversas calificaciones. (Véanse, por ejemplo, las observaciones de Hausdorff y Weyl citadas en la p. 196.) Así, pues, los conceptos de la matemática son puramente exactos, esto es, ellos y todas sus especies son exactos. (Según Cantor "hay" 2^1 subconjuntos de todo conjunto de número cardinal ti, y todos ellos son exactos. En los sistemas posteriores, no "existen" todos estos subconjuntos, pero los que existen son exactos, y lo mismo cabe decir de las funciones preposicionales o de los conceptos, de los cuales esos subconjuntos son los rangos o extensiones.)

Por otra parte, toda característica perceptiva es internamente inexacta, lo cual significa —lo recordamos— que cada una de sus especies o es inexacta o bien, si es exacta, tiene una subespecie inexacta. Cabría defender un enunciado más fuerte todavía, a saber, que si *P* es una característica perceptiva, *todas sus especies propias* (todas sus especies con excepción de *P* misma) son inexactas. Sin embargo, el enunciado más débil y menos controvertido bastará para el propósito de comparar y relacionar la matemática y la percepción.

Que la matemática es puramente exacta, esto lo han dicho a menudo los lógicos y los matemáticos en una forma u otra y se aceptará, creo yo, de modo general. Cabría objetar, sin embargo, que la exactitud de todos los conceptos matemáticos no forma parte de su esencia, que puede constituir acaso un accidente histórico que más tarde o más temprano habrá de revelarse como tal, del mismo modo que el interés inicial de la matemática por la sola cantidad se reveló como un accidente histórico. La objeción es meramente verbal. En efecto, si algo cierto se ha

Platón sí distingue entre Formas matemáticas exactas y características empíricas inexactas, pero tampoco él se da cuenta de la posibilidad de sistemas matemáticos alternativos, y es posible que ésta sea una de las razones de su teoría metafísica de las Formas. Por supuesto, no tenía manera de comparar la lógica de los conceptos exactos e inexactos, en un momento en que la primera se encontraba en sus etapas iniciales.

Resulta natural y fácil extender la tesis de la inconexión de los conceptos a los objetos, proposiciones y teorías. Definimos el objeto perceptible como aquel que sólo posee características perceptibles, y el objeto matemático como aquel que sólo posee características matemáticas, y dos objetos como "inconexos" si sus características son inconexas. Así, pues, los objetos matemáticos y los perceptibles son inconexos. Definimos una proposición como perceptible si y sólo si afirmarla equivale a atribuir o negar una característica perceptible a uno o más objetivos, y la definimos como puramente exacta si y sólo si los conceptos que son atribuidos o negados al afirmar la proposición son puramente exactos. Designamos los conceptos atribuidos o negados como los "conceptos constituyentes" de la proposición, y definimos dos proposiciones como inconexas si y sólo si sus conceptos constituyentes son inconexos. Así, pues, las proposiciones matemáticas y las perceptibles son inconexas. Finalmente, designamos una teoría como puramente exacta si y sólo si todas las proposiciones y todos los conceptos constituyentes de las proposiciones son puramente exactos, y la designamos como perceptible si una o más proposiciones y, por consiguiente, uno o más de sus conceptos constituyentes son perceptibles. Así, pues, las teorías matemáticas y las perceptibles son inconexas.

Para resumir, decimos que la matemática y la percepción son inconexas, o que la matemática pura está desconectada de la percepción. Esta última expresión sugiere que, al matematizar los conceptos, las proposiciones y las teorías perceptibles, modificamos los conceptos perceptibles, de tal modo que dejan de ser perceptibles. La modificación o idealización equivale, en cierto modo, a una "desconexión" con respecto a la percepción.

entonces la siguiente proposición, muy simple, acerca de la relación entre conceptos exactos e inexactos, y entre conceptos puramente exactos o internamente inexactos adquiere significado filosófico:

Si 21 es un concepto puramente exacto y $\mathfrak{P}$ es un concepto internamente inexacto, entonces se sigue inmediatamente de las definiciones de exactitud pura e inexactitud interna que ni 51 $< \mathfrak{P}$ ni ¿£<21. Dado que toda especie de $ ha de ser inexacta por definición o tener una subespecie inexacta, 21 no puede estar incluido ení£. Y dado que toda siįbespecie de 21, ha de ser exacta por definición, $\mathfrak{P}$, que tiene especies inexactas, no puede ser una especie de 2T.

Dado que todos los conceptos matemáticos son puramente exactos y que todas las características perceptibles son internamente inexactas, se sigue que ningún concepto matemático incluye o es incluido (implica lógicamente o es implicado, trasmite o es trasmitido, etc.) en característica perceptible alguna. Diremos, pues, que los conceptos matemáticos y las características perceptibles son (deductivamente) inconexos.

La tesis de la "inconexión" de las características matemáticas y perceptibles y la caracterización de los conceptos matemáticos como inconexos con los perceptibles nos recuerda la bien conocida posición kantiana de que los conceptos matemáticos son *a prióri.* Pero Kant supone, con todo, que sus conceptos *a priorí,* en la medida en que pertenecen a la matemática, están ejemplificados en la percepción y, más concretamente, que son características de estructuras perceptibles presuntamente invariantes, esto es, el espacio y el tiempo. Concibe los conceptos matemáticos como inconexos, no con todas las características perceptibles, sino solamente con aquellas que son perceptibles-*sensibles.* Nuestra tesis, en cambio, es más radical, por cuanto no reconoce la distinción kantiana entre la percepción sensible y la percepción pura o intuición. La concepción de Kant implica además una posición privilegiada para ciertas teorías matemáticas, esto es, para aquellas que presuntamente describen la pura percepción. Y finalmente, Kant no considera —o no toma en serio— la distinción entre conceptos exactos e inexactos.

adopción por alguien— no es un concepto, no es ni verdadera ni falsa y es susceptible, sin embargo, de estar en relaciones lógicas con otras reglas, siendo considerada, cuando menos por muchas personas, como una proposición. Esto lo reconocen implícitamente aquellos lógicos que suelen calificar su empleo de "proposición" añadiendo "declarativa" o "indicativa".

Hay una característica, sin embargo, que basta para distinguir las proposiciones (incluidas las reglas) de los conceptos, a saber, que estos últimos son susceptibles, a diferencia de las proposiciones, de atribuirse a objetos (véase p, 206). Por consiguiente, caracterizamos las proposiciones: i] como susceptibles de figurar en relaciones lógicas, y ii] como no susceptibles de aplicarse a objetos. Si bien una proposición expresará acaso la atribución de un concepto a un objeto, la proposición —la atribución— no es susceptible, con todo, de atribuirse ella misma a cosa alguna. Esto es así, inclusive si deseáramos, como yo lo deseo, considerar las proposiciones como características de la "realidad" o del "mundo en su conjunto".

Las proposiciones, en nuestro amplio sentido del término, pueden dividirse en tres clases: a] proposiciones lógicas, que expresan relaciones lógicas entre conceptos o entre proposiciones; b] reglas, esto es, proposiciones que son susceptibles de ser respetadas o vulneradas por la conducta de sus adeptos, y c] proposiciones factuales, esto es, proposiciones que no son ni reglas ni proposiciones lógicas.[5] Caen en esta última categoría las proposiciones existenciales, que no son ni reglas ni proposiciones lógicas. En efecto, la proposición *"Existe* un objeto, digamos *x*, al que puede atribuirse correctamente un concepto, digamos P" no expresa ni una relación lógica entre conceptos, como la de inclusión, exclusión, etc., ni expresa una relación lógica entre proposiciones, como la de deductibilidad o incompatibilidad. Es una proposición factual.

Sin embargo, la caracterización de las proposiciones de existencia como factuales es, con todo, mucho más laxa. "Hay enteros que satisfacen los axiomas de Peano" y "Hay árboles" son dos proposiciones muy diferentes. Y sin em-

[5] Véanse más detalles en *Conceptual Thinking,* cap. 3.

3] PROPOSICIONES MATEMÁTICAS DE EXISTENCIA

El problema de las proposiciones matemáticas de existencia (proposiciones, teoremas, metateoremas, etc., pero no, en cambio, arreglos no interpretados de objetos pertenecientes a un cálculo) es tan antiguo, cuando menos, como la discusión de lo llamado matemático (véase p. 13). Las proposiciones matemáticas de existencia, por ejemplo, "Existe un punto euclidiano", o "Existe un primer número natural", son totalmente distintas *prima facie* de otras proposiciones de existencia, como por ejemplo, "Existe una silla", o "Dios existe". Cabría esperar encontrar la diferencia conexa con la diferencia entre los conceptos puramente exactos y los demás.

Con objeto de aclarar la noción de proposiciones matemáticas de existencia se hace necesario aclarar hasta cierto punto la noción de proposición. Una forma tradicional consistiría en caracterizar las proposiciones como: i] dotadas de significado, y ii] como verdaderas o falsas. Toda vez que "significado" —sentido, contenido lógico— lo poseen también los conceptos, la segunda característica sirve para distinguir los conceptos de las proposiciones. Exponer el significado de un concepto (o una proposición) equivale a exponer las relaciones lógicas que mantiene con otros conceptos (o proposiciones). Las relaciones lógicas entre conceptos las hemos investigado hasta cierto punto. Y las que se dan entre proposiciones dependen de las reglas que rigen sus conceptos constituyentes, por una parte y, por la otra, de las reglas que rigen constituyentes no-conceptuales de las proposiciones relacionadas, como son los conexivos, los cuantificadores y otros operadores. La extensión de la lógica de los conceptos hasta incluir tanto a los exactos como a los inexactos conducirá también a una extensión de la lógica de las proposiciones analizadas y no analizadas, tarea que no podemos emprender aquí.

La segunda característica tradicional de las proposiciones, el que sean falsas o verdaderas, es demasiado restrictiva. Excluiría de las proposiciones a las reglas, puesto que éstas no son ni ciertas ni falsas. La regla, por ejemplo, "No fumar nunca antes del desayuno" —considerada aparte del hecho empírico de su imposición a alguien o de su

o falsa. (Lo que es cierto es que una de ellas es adoptada, seguida, violada, recomendada, etc.)

Veamos ahora las proposiciones factuales, esto es, las proposiciones que no son ni proposiciones lógicas ni reglas. Las proposiciones empíricas particulares y generales —en donde puede entenderse, con Popper, que "empírico" significa falsifícable— son manifiestamente únicas. Así, pues, de las dos proposiciones particulares incompatibles, "Todas las piezas de cobre conducen electricidad" y "Hay una pieza de cobre que no conduce electricidad", una, cuando menos, ha de ser falsa. La proposición mencionada en último término es asimismo un ejemplo de proposición existencial única. Y a su vez, las proposiciones teológicas "El hombre tiene un alma inmortal" y "El hombre no tiene un alma inmortal" son únicas, a menos que adoptemos el criterio positivista lógico del significado.

Con objeto de demostrar que las proposiciones de existencia matemáticas son no-únicas, voy a adoptar el siguiente supuesto, esto es: que una proposición cierta de que existe un objeto que tiene la propiedad *P* implica lógicamente que *P* es internamente coherente; pero que la coherencia interna de *P* no implica que un objeto que tenga *P* existe. En resumen, la existencia implica la coherencia, pero no, inversamente, la coherencia la existencia. (Supongo asimismo que el significado de "coherencia" y sus afines no son objeto de controversia, en el sentido de que cualquier análisis o definición que dejara de preservar como cierta la proposición acerca de la relación entre la existencia y la coherencia debería rechazarse como inadecuada.)

Si comparamos "Existe una pieza de cobre" y "Existe un alma inmortal", por una parte, con "Existe un punto euclidiano", por la otra, vemos que los fundamentos para estas proposiciones de existencia Son totalmente distintos. En efecto, la coherencia de los conceptos constituyentes es necesaria en todos los casos, pero, en tanto que podemos hacer disponibles por decisión o postulado objetos para "punto euclidiano", no podemos hacerlo, en cambio, para "pieza de cobre" o para "alma inmortal".

Es legítimo, con la sola condición de que "punto euclidiano" sea infernamente coherente, postular la existencia

bargo, las dos son factuales. Con objeto de caracterizar las proposiciones existenciales de la matemática más de cerca, hemos de introducir todavía otra clasificación de las proposiciones, esto es, la dicotomía, en aquello que designaré como proposiciones únicas y no-únicas.

Diré que una proposición, digamos *p,* es única, si y sólo si lá incompatibilidad de *p* con alguna otra proposición, digamos *q,* implica que cuando menos una de ellas es falsa. Las proposiciones lógicas son únicas. Consideremos, por ejemplo, las proposiciones lógicas P|Q y P Q Q incompatibles. Si una de ellas ostenta el significado de P y de Q o, más exactamente, si una de ellas es conforme a las reglas que rigen P y Q, entonces la otra las vulnera. En este caso, una de ellas es cierta y la otra falsa. Por supuesto, la incompatibilidad de P|Q con P O Q admite también la posibilidad de que ni la una ni la otra sean ciertas, por ejemplo, a causa de P < Q. En otros términos, la incompatibilidad de P|Q con P O Q implica que cuando menos una de ellas es falsa. A título de otro ejemplo, consideremos la proposición lógica "*p* implica lógicamente *q*" —que algunas veces se escribe, en forma más precisa, como "pVí", en donde el sufijo se refiere a reglas que rigen los tipos de constituyentes conceptuales y no conceptuales de un lenguaje o un sistema conceptual dados. Esta proposición es incompatible, por ejemplo, con "*p* no implica lógicamente *q*". El hecho de que las dos sean únicas puede verse mediante un argumento que es precisamente similar al precedente. Afirmar la coherencia interna de una conjunción de conceptos o proposiciones equivale a afirma relaciones lógicas y, en consecuencia, una proposición única.

Las reglas, a diferencia de las proposiciones, no son únicas. Porque toda vez que las reglas no son ni ciertas ni falsas, la incompatibilidad mutua de dos reglas no puede implicar que una de ellas, cuando menos, sea falsa. Las reglas "No fumar nunca antes del desayuno" y "Fumar antes del desayuno todos los lunes" son incompatibles, pero su incompatibilidad no implica que una de ellas, cuando menos, sea falsa. Lo mismo sería cierto de dos reglas que utilizaran <perro> como etiqueta para perros o que la utilizaran para gatos, ya que ni una regla ni otra es cierta

el botánico o el zoólogo no pueden crear los casos de sus conceptos autocoherentes, el matemático puro, en cambín, puede decretar la existencia de los objetos de sus conceptos autocoherentes por su propio *fíat.* Y no sólo puede hacerlo, sino que lo está haciendo continuamente. Las proposiciones de existencia matemáticas de la forma "Hay un objeto tal que. . ." son proposiciones factuales no-únicas.

La idea de que las proposiciones matemáticas de existencia son proposiciones lógicas únicas se basa, según vimos, en definiciones *ad hoc* de lo que se entiende por "principio lógico", clasificándose como lógicos a principios tales como el axioma del infinito. Inclusive si nuestra definición de la proposición lógica en cuanto expresión de una relación lógica entre conceptos o entre proposiciones se considera como demasiado estrecha, ninguna proposición del tenor de que los objetos para un concepto internamente coherente existen es, con todo, una proposición lógica. Y de hecho, este requisito negativo es una de las pruebas del carácter adecuado de toda definición de "proposición lógica".

La idea de que *algunas* proposiciones matemáticas de existencia son proposiciones fuctuales únicas se basa, en la filosofía formalista de la matemática, en el presunto hecho de que describen objetos perceptibles, esto es, trazos y operaciones de. trazos. Se debe a la confusión de casos de características perceptivas inexactas con casos de conceptos matemáticos puramente exactos. En la filosofía intuicionista, por su parte, la idea del carácter único de las proposiciones de existencia se basa en el presunto hecho de construcciones intuitivas e intersubjetivas autoevidentes. También este punto de vista se ha refutado anteriormente por medio de un argumento viejo pero eficaz.

Hemos dicho que la posición de objetos para conceptos internamente coherentes constituye el fundamento de las proposiciones matemáticas de existencia. Esto no implica, con todo, respuesta alguna a la pregunta acerca de si deberíamos efectivamente postular tales objetos en un caso dado. Decir que sí la implica equivaldría a considerar que el hecho de que la manufactura de un determinado tipo de automóviles sea el fundamento de proposiciones en el sentido de que existen automóviles de este

de puntos euclídianos, independientemente de la naturaleza del universo físico. Pero no se sigue de ahí que al enunciar "Existe un punto euclidiano" no enunciemos ni más ni menos sino que "punto euclidiano" es internamente coherente. El hecho de que esto sería falaz se sigue no sólo de la relación general entre existencia y coherencia, sino también de la estructura de la geometría euclidiana, tal como la exponen, por ejemplo, Hilbert o Veblen: si las proposiciones de existencia de la geometría euclidiana no expresaran más que la coherencia de los conceptos de la teoría, tal como la expresan sus proposiciones no-existenciales, entonces debería ser posible eliminar de la teoría, una vez demostrado que era coherente, todos los postulados existenciales, sin eliminar ninguna de las consecuencias de la teoría original. Sería posible, pues, demostrar la dependencia de todas las proposiciones existenciales de la teoría con respecto a sus proposiciones no-existenciales. Y esto, según se deja demostrar, es falso.

La libertad para postular la existencia de puntos euclidianos implica la libertad de postular su no-existencia. Esto significa que, si bien las proposiciones "Existen puntos euclidianos" y "No existen puntos euclídianos" son incompatibles, esta incompatibilidad no implica, con todo, que una de ellas, cuando menos, sea falsa. En efecto, las dos proposiciones, si bien factuales, son con todo, al igual que las reglas, no-únicas. Este simple resultado no puede expresarse en términos de las habituales caracterizaciones estrechas de proposiciones, lo que ha de oscurecerlo necesariamente.

Las mismas observaciones se aplican a las proposiciones matemáticas de existencia en general. La coherencia de todo concepto puramente exacto —por ejemplo, de "entero" — permite la posición de objetos existentes. Los diversos conceptos de número real, e inclusive de "entero", tal como lo caracterizan los finitistas estrictos, los intuicionistas y los matemáticos clásicos, son tan distintos unos de otros como lo son los conceptos de "punto" en las geometrías euclidiana y no-eudidiana. Hemos de distinguir en la matemática pura, con el mismo cuidado que en botánica o en zoología, entre proposiciones de existencia y proposiciones de coherencia Sin embargo, en canto que

Resulta indicado empezar el examen con la cita de un enunciado conciso de un físico teórico. El enunciado es similar, en espíritu, a otros a los que hemos tenido ocasión de referirnos, de matemáticos y científicos prácticos que emplean la matemática en su campo, y su número podría aumentarse indefinidamente. P. A. M. Dirac® señala que la mecánica cuántica necesita para su formulación de un aparato matemático distinto del empleado en la física clásica, porque el contenido físico de las nuevas ideas "requiere que los estados de un sistema dinámico y de variables dinámicas se enlacen en formas totalmente extrañas, que son ininteligibles desde el punto de vista clásico**. Y expresa su idea general de la estructura de la mecánica cuántica, y por lo visto de toda teoría física, como sigue:

"El nuevo esquema se convierte en una teoría física precisa cuando todos los axiomas y reglas de manipulación que rigen las cantidades matemáticas están especificados y cuando, además, se consignan ciertas leyes físicas enlazando los hechos físicos con el formalismo matemático, de modo que de cualesquiera condiciones físicas puedan inferirse ecuaciones entre cantidades matemáticas y viceversa. En una aplicación de la teoría, se nos daría cierta información física que procederíamos a expresar por medio de ecuaciones entre cantidades matemáticas. Deduciríamos luego nuevas ecuaciones, con ayuda de los axiomas y de las reglas de manipulación, y concluiríamos interpretando estas nuevas ecuaciones como condiciones físicas. La justificación del procedimiento conjunto depende, aparte de la coherencia interna, de la concordancia de los resultados finales con el experimento."

Al hablar de "consignar leyes que enlacen hechos físicos con el formalismo matemático*', Dirac pone cuidado en no prejuzgar la naturaleza del enlace en términos de correspondencia biunívoca entre características u objetos físicos y matemáticos, o en términos de una ejemplificación de características matemáticas por medio de características físicas.

Eddington, quien considera la estructura lógica de la

9 *The Principies of Quantum Mechantes,* 3ª ed., Oxford, 1947, reimpreso en 1956» p. 15.

tipo, implicaba una respuesta a la pregunta acerca de si estos automóviles han de fabricarse o no. Lo que hemos dicho a propósito de las proposiciones de existencia en matemática concuerda bien con las nociones de los matemáticos prácticos. En efecto, su empleo del término *"postulado* de existencia'* sugiere muy claramente el carácter no-único de las proposiciones matemáticas de existencia.

Podría objetarse que no toda teoría matemática incluye proposiciones de existencia y que todas las proposiciones matemáticas no son más que enunciados lógicos en el sentido de que los postulados implican lógicamente los teoremas. Una teoría matemática no sería más, en tal caso, que una exposición de significado: de una red conceptual, en cierto modo, sin consideración alguna acerca de si puede o no "captar objetos". Pero podemos contemplar la red conceptual de la zoología (descriptiva) con resultados perfectamente paralelos. Podemos, además, plantear la cuestión acerca de cómo se proporcionan los objetos, en su caso, para los conceptos de uno y otro sistema. Por lo que se refiere a la zoología, la respuesta será: por datos perceptibles u objetos físicos, y para la matemática: por postulado.

Se recomienda evitar decir que toda teoría de matemática pura contiene proposiciones de existencia que son no-únicas, y decir, más bien, que las proposiciones de existencia que o están contenidas en la teoría o mediante las cuales ésta puede completarse poseen esta característica. En está inteligencia podemos resumir el argumento de las últimas dos secciones en esta forma: toda teoría de matemática pura —formulada en términos de conjuntos y funciones o conceptos afines— es puramente exacta y existencialmente no-única.

4] LA NATURALEZA DE LA MATEMÁTICA APLICADA

La matemática pura está desconectada (lógicamente) de la percepción. En cambio, en la matemática aplicada, especialmente en la física teórica, la matemática pura y la percepción se juntan. ¿Cuál es la naturaleza de esta relación? El terreno adecuado para la respuesta parece haber estado ampliamente preparado por el examen precedente.

dad (filosófica)", en términos del ejemplo sumamente simple que nos sirvió en nuestra crítica de los puntos de vista tanto logicista como formalista de la matemática aplicada. Consideremos una vez más, pero ahora a la luz del examen más preciso y detallado de la lógica de los conceptos exactos e inexactos, las proposiciones:

1] "1 + 1 = 2"
2] "Una manzana y una manzana son dos manzanas"

La proposición 1] es una proposición de matemática pura que puede analizarse de muchas maneras distintas, o sea que puede considerarse como proposición perteneciente a diversas teorías aritméticas que no necesitan ser congruentes una con otra, difiriendo, por ejemplo, en sus postulados transfinitos. (Al decir que dos teorías tales serán acaso incongruentes, quiero decir que el conjunto de postulados de las dos teorías, tomados juntos como definiendo conjuntamente conceptos de número *no* diferentes, sino el *mismo* concepto de número, es una conjunción incongruente.) Sin embargo, cada una de estas versiones implica únicamente conceptos puramente exactos. Así, por ejemplo, los conceptos de 1] y de 2] podrán considerarse, a la manera de Frege, como conceptos exactos que caracterizan unidades y pares; a la manera de Hilbert, como conceptos exactos que caracterizan trazos sobre el papel (los cuales, sin embargo, han de considerarse como casos positivos de conceptos inexactos que admiten —pero de conceptos exactos que no admiten— candidatos neutros), o finalmente, a la manera de Brouwer, como características exactas de construcciones intuitivas autoevidentes. Cada una de estas versiones deja margen para diferencias ulteriores más detalladas en las reglas que rigen estos conceptos exactos, de acuerdo con variantes reales o posibles de estas doctrinas principales en la filosofía de la matemática. Y lo propio se aplica al análisis de la adición matemática. En efecto, Frege considera la adición matemática como una relación puramente exacta de la suma lógica (de rangos exactos de conceptos); Hilbert, por su parte, la considera como un concepto exacto, característico de la yuxtaposición de trazos ideales, y Brouwer, finalmente, como una caracte-

teoría de la relatividad en su obra igualmente clásica,[10] es, a mi modo de ver, menos claro. Habiendo desarrollado "una geometría pura que se propone ser descriptiva de la estructura de relaciones del universo", formula lo que él llama "principio de identificación" como sigue: "La estructura de las relaciones se presenta en nuestra experiencia como un mundo físico que consta de *espacio, tiempo* y *cosas.* La transición de la descripción geométrica a la física sólo puede hacerse identificando los tensores que miden las cantidades físicas con tensores que ocurren en la geometría pura, y necesitamos proceder inquiriendo primero cuáles propiedades experimentales posee el tensor físico y buscando luego un tensor geométrico que posea estas propiedades *por virtud de identidades matemáticas"*

La dificultad estriba en el significado del término "identificación". Si lo que se quiere decir es que para determinados propósitos se tratan características físicas como *si* fueran matemáticas, entonces las observaciones de Eddington serían perfectamente similares, en cuanto a la intención, a las de Dirac. Pero si lo que se quiere decir es que la identidad de las características físicas y matemáticas se descubre, se conjetura o se postula, entonces el principio de identificación es falso, porque es incompatible con la desconexión de la matemática con respecto a la percepción. Las últimas obras de Eddington, en particular las explícitamente filosóficas, tienden a confirmar la segunda interpretación —que ignora la diferencia fundamental entre conceptos puramente exactos y correspondencias definidas, tal como se encuentran en la matemática pura, por una parte, y los conceptos y las semejanzas inexactas, tal como se encuentran en las proposiciones perceptivas por la otra.

Con objeto de explicar la relación entre características matemáticas y perceptivas en la física teórica y en la matemática aplicada en general, no es necesario, afortunadamente, considerar teoría matemáticamente compleja alguna, como la mecánica cuántica o la teoría de la relatividad. Se la puede considerar, antes bien, "sin pérdida de generali-

ce *The Mathematical Theory of Relativity,* 2ª ed., Cambridge, 1924, p. 222.

Se ha sostenido, en los capítulos de crítica anteriores, que considerar la relación entre 1] y 2] no equivale ni siquiera a tocar el problema implicado en la aplicación de la matemática pura a la experiencia. Dar una explicación de la relación entre 1] y 2b] en términos de la que existe entre 1] y 2a] equivale a cometer el error de confundir conceptos puramente exactos, sus objetos y las proposiciones que los implican, con conceptos internamente inexactos, sus conceptos y las proposiciones que los implican. Equivale a pasar por alto la diferencia fundamental entre la lógica de los conceptos exactos e inexactos y su desconexión (lógica) .

Toda vez que 2a] y 2b] son de una estructura totalmente distinta y toda vez que, por consiguiente, 2b] no es ni una ejemplificación de 1] ni es isomórfica con ella, la "aplicación" de 1] que se traduce en 2b] —esto es, la idealización o materna tización de 2b] por 2a]— consiste en remplazar 2b] por 2aJ. Esta sustitución está justificada por el propósito en vista. En particular, si 2a] sirve, junto con otras proposiciones matemáticas, como premisa para la deducción de otras proposiciones matemáticas, y si algunas de éstas pueden considerarse como idealizaciones de nuevas proposiciones empíricas, la -sustitución original de 2b] por 2a] está justificada como medio auxiliar en el descubrimiento de nuevas verdades. El procedimiento de la física teórica y de la matemática aplicada en general consiste en *sustituir* proposiciones empíricas por proposiciones matemáticas, en deducir consecuencias matemáticas de premisas matemáticas y en sustituir algunas de estas consecuencias por proposiciones empíricas. El hecho de que este procedimiento pueda ser —y haya sido de hecho a menudo— sumamente eficaz, depende de que el mundo sea como es. Y el hecho de que se hayan encontrado reglas satisfactorias que rigen —más o menos estrictamente— el intercambio de conceptos exactos e inexactos (antes y después de la deducción matemática) , depende de aquellas características del universo que se conocen con el nombre de ingenio humano.

La diferencia entre la matemática aplicada de la adición de manzanas, por una parte, y la mecánica cuántica y la física de la relatividad, por la otra, no es más que

rística exacta de una contrapartida intuitiva de su operación perceptiva.

Así, pues, de cualquier modo que se la analice, la proposición 1] sólo implica conceptos puramente exactos y está desconectada de la percepción. Implica, sin duda, de acuerdo con Hilbert y Brouwer, que los conceptos incluidos no son vacíos. Es existencial y, según lo sostuvimos, no-únicamente tal.

La proposición 2], por su parte, puede analizarse de dos maneras distintas. Se la puede considerar, primero, como puramente exacta. Esto, según vimos, es lo que hace el logicista al considerar' 2] como un caso de sustitución de 1], obtenida sustituyendo clases-unidades no especificadas por clases-unidades especificadas de manzanas en 1], y luego su suma lógica por la suma lógica no especificada en 1]. La transición va, para *x* e *y* distintos, no vacíos, de

CW) (((* g i) & (y g i)) = ((* u y) e 2))

a ((o e i) & (yo e l) « ((x o U yc) e 2).

En el sistema formalista, 2] se interpreta como isomórfica con 1], considerándose tácitamente a las manzanas y su yuxtaposición como casos de concepto exactos. Me referiré a toda transcripción de 2], que se transforma del modo indicado en una proposición exacta, como a 2a].

Sin embargo, la proposición 2] puede considerarse asimismo como enunciado empírico del resultado de alguna adición física de objetos físicos. Los conceptos "unidad física", "adición física" y "par físico", en los diversos sentidos de estos términos, son todos ellos internamente inexactos, y la proposición de la que estos conceptos son constituyentes es, por consiguiente, internamente inexacta. "Una manzana y una manzana son dos manzanas" es una ley empírica de la naturaleza, la cual a diferencia de *' 1 4 - 1 = 2", es susceptible de confirmación o refutación" por el experimento y la observación. Me referiré a todo análisis de una proposición 2] que se transforma en una proposición general empírica que implica características (perceptivas) internamente inexactas como a 2b].[11]

[11] Véase un análisis de las leyes empíricas de la naturaleza en *Conceptual Thinking,* cap. xi.

misma relación de desconexión que la "adición física" en sus diversos sentidos, por ejemplo, lo está con respecto a la "adición matemática", ya se defina este concepto como concepto puramente exacto a la manera del logicista, del formalista, del intuicionista o en cualquiera otra forma.

En relación con esto necesitamos mencionar una distinción entre conceptos de matemática pura y aplicada debida a Karl Menger.[33] Éste define una cantidad como un par ordenado, cuyo primer miembro es un objeto y cuyo segundo miembro es un número. Dos cantidades son congruentes, a menos de que tengan el mismo objeto y valores numéricos distintos. Sí el objeto no es un número, sino, por ejemplo, una distancia física o un acto de leer una escala, entonces la cantidad pertenece a la matemática aplicada, y no a la pura. La clase de cantidades mutuamente congruentes se designa brevemente como un "fluyente". Si los primeros miembros de sus elementos son números, el fluyente es una función de matemática pura. Y si los primeros miembros de sus elementos no son números, el fluyente expresa una relación de matemática aplicada.

Los penetrantes análisis de Menger en términos de estos conceptos-clave han llegado a mi conocimiento demasiado tarde para que yo pueda dedicarles aquí la atención que merecen. Debo limitarme a indicar, por consiguiente, que sus fluyentes, en particular los que pertenecen a la matemática aplicada, son puramente exactos y, por tanto, están deductivamente desconectados de los conceptos empíricos, que son internamente inexactos.

Para resumir nuestro examen de la matemática aplicada: la "aplicación" a la percepción de la matemática pura desconectada lógicamente de la percepción, consiste en una actividad más o menos estrictamente reglamentada que implica: i] la sustitución de conceptos y proposiciones empíricos por conceptos y proposiciones matemáticos; ii] la deducción de consecuencias a partir de las premisas proporcionadas en esta forma, y iii] la sustitución de algunas de las proposiciones matemáticas deducidas por proposiciones empíricas. Podríamos añadir, en iv] lugar, la con-

13 Véase *Calculus — A modem appraach,* Boston, 1955, y diversos trabajos allí mencionados.

una diferencia de complejidad. En efecto» en la mecánica cuántica y en la física de la relatividad, dos intercambios sucesivos de conceptos o proposiciones puramente exactos y conceptos o proposiciones internamente inexactos (la sustitución primero de conceptos y proposiciones físicos por matemáticos y luego de estos últimos por físicos) suelen estar separados por largas cadenas de razonamiento matemático, en tanto que en la física de la adición de manzanas, la cadena de razonamiento matemático será corta o inexistente. Por otra parte, en tanto que al aplicar el espacio de la geometría pura de Hilbert a los fenómenos físicos de la física atómica, y al aplicar el cálculo de tensores a los fenómenos físicos de cuerpos en movimiento, no todo concepto o proposición matemática se acopla con uno físico; el acoplamiento de las proposiciones y los conceptos matemáticos con los físicos es completo, en cambio, en nuestro ejemplo de las manzanas.

Podría objetarse que, con frecuencia, antes de que la matemática pura pueda aplicarse a la experiencia sensible, ha de extenderse primero mediante la introducción de nuevos conceptos y de postulados que rijan su empleo. Así, por ejemplo, de acuerdo con Russell,[12] la matemática pura se extiende a la dinámica racional mediante la introducción de conceptos como los de “masa”, “velocidad”, etc., y de nuevos postulados correspondientes.

Inclusive si admitimos la posibilidad dudosa de distinguir estrictamente entre estos conceptos matemáticos y los conceptos matemáticos puramente lógicos, los conceptos de la dinámica racional son, con todo, puramente exactos. La “masa” y la “velocidad”, tal como se emplean en la dinámica racional, están deductivamente desconectadas de los conceptos de masa y velocidad característicos de la experiencia sensible, dentro y fuera de los laboratorios, y los cuales, lo mismo que todos los conceptos empíricdS, son internamente inexactos. (La dinámica racional no comprende concepto alguno que admita casos-límite.) En otros términos: los conceptos de la dinámica racional están con respecto a sus contrapartidas empíricas —si las hay— en la

12 *Principies of Mathematics,* 2ª ed., Londres, 19 7, pp. 465 55.

filosóficas tienen más probabilidades de resultar eficaces cuando la tarea no consiste tanto en encontrar teoremas como en encontrar teorías. Y serán también más. eficaces en la construcción de teorías encaminadas a proporcionar los "fundamentos" de la matemática, que en teorías que proporcionen el aparato matemático, por ejemplo, para una rama de la física. El hecho de que cuando menos los iniciadores de la matemática logicista, formalista e intuición ista se vieron fuertemente influidos por supuestos, intuiciones y prejuicios filosóficos (comoquiera que se los quiera llamar) , esto no puede dudarse si tomamos en serio sus propios enunciados. Con objeto de ver las relaciones entre la matemática y la filosofía más claramente, bien podemos considerar un poco más de cerca la útil y ampliamente adoptada distinción entre la filosofía analítica y la metafísica. Bastará un tratamiento algo esquemático y sumamente simplificado? [5]

La filosofía analítica propendía a considerarse en un tiempo como la exposición del "significado" de enunciados de sentido común y de enunciados y teorías pertenecientes a campos especiales de investigación, considerándose que semejante exposición no cambiaba, sino que no hacía más que poner claramente de manifiesto lo que se pretendía decir. Después de la adopción generalizada del consejo de Wittgenstein, en el sentido de buscar no el significado sino el uso lingüístico de las expresiones, sus seguidores consideraron su filosofía analítica como la exposición de las reglas que regían las expresiones lingüísticas de las opiniones y las teorías analizadas. El requisito de que el análisis no debe cambiar aquello que analiza sigue respetándose. Wittgenstein lo formula diciendo que "la filosofía no afectará acaso en forma alguna el uso real del lenguaje, sino que a la larga sólo puede describirlo". [16] Designa esta clase de análisis como "análisis de exposición".

Sin entrar en la cuestión acerca de en qué medida el

15 Para explicaciones más detalladas véase *Conceptual Thinking,* especialmente los caps, xxx a xxxíii, y *Broad on Philosophical Method,* a punto de aparecer, en el volumen de Broad, de la *Library of Líving Philosophers,* ed. Schilpp.

1<J *Philosophical Investigations,* Oxford, 1953. p. 49-

firmación experimental de estas últimas proposiciones, lo cual, sin embargo, es más bien tarea de los científicos experimentales que de los teóricos.

La idea expuesta concuerda fundamentalmente con el enunciado de Dirac, con los puntos de vista de Von Neumann (véase p- 72) y con muchos otros. Y tiene también afinidades, según ya se señaló, con las ideas de Curry a propósito de la matemática aplicada. El rasgo nuevo de la presente explicación está en la puesta de manifiesto del contraste entre conceptos y proposiciones matemáticos (puramente exactos) y conceptos y proposiciones empíricos (internamente inexactos), contraste que se muestra de la manera más clara en el simple teorema a propósito de su desconexión.

La "aplicación" de la matemática en la física teórica la entienden algunos filósofos contemporáneos en una forma más bien distinta. Sostienen, en efecto, que mediante razonamiento matemático se deducen *directamente* conclusiones empíricas de premisas empíricas, sin el intercambio de conceptos y proposiciones exactos e inexactos antes y después de la deducción matemática. Esto lo sugiere, por ejemplo, el aforismo bien conocido de Benjamín Peirce, de que la matemática es "la ciencia que extrae conclusiones necesarias". Se halla implícito asimismo en la filosofía de la matemática de Kant. Y está tal vez implícito también —o cuando menos no se niega— en algunas obras modernas, como en la excelente *Scientific Explanation*,[14] de R. B. Braithwaite. Sin embargo, ignorar el intercambio de conceptos exactos e inexactos en los argumentos de la física teórica, equivale a extender la mezcla de los conceptos matemáticos y empíricos de la filosofía de la matemática a la de la ciencia.

5] MATEMÁTICA Y FILOSOFÍA

La matemática se dedica a llenar dos clases de vacíos, no siempre estrictamente discernibles, vacíos que consisten en la ausencia de teoremas en las teorías existentes, y vacíos que consisten en la ausencia de teorías. Las consideraciones

i* Cambridge, 1953.

inmediatamente la cuestión acerca de cómo deba justificarse la elección entre diversos criterios.

Ni el análisis de exposición ni el de sustitución pueden justificar la elección. Si es correcto, el análisis de exposición sólo mostrará cuál elección se ha efectuado, y el análisis de sustitución, por su parte, sólo puede tener lugar después de que se hayan elegido los criterios o se los haya adoptado sin selección. Al elegir un criterio de solidez de una teoría física o matemática, elegimos un programa para la construcción de teorías. En el caso de teorías físicas, la elección está limitada por los hechos de observación y experimento. Pero inclusive aquí adquieren importancia otros requisitos, como lo pone de manifiesto la disputa, por ejemplo, entre Einstein y Bohr y sus discípulos, no tanto acerca del formalismo de la Mecánica Cuántica como a propósito de su "inteligibilidad" o su "valor de explicación".[17] En el caso de las teorías matemáticas, el control por la experiencia, si lo hay, es a lo sumo totalmente indirecto, y la elección la deciden más las convicciones metafísicas, presuntamente basadas en intuiciones de la naturaleza de la "realidad", o en la práctica y la tradición sólidas. Éstas se hacen eficaces como principios reguladores, esto es, como reglas de conducta, siendo el área de la conducta la construcción de teorías matemáticas.

Por lo que se refiere a la estructura interna de las teorías matemáticas, hay poco margen para el análisis de exposición. Hay que decir de las reglas que rigen la formación de proposiciones y la inferencia en la teoría matemática, que o están ya explícitamente formuladas, en cuyo caso np hay necesidad de volver a exponerlas, o están implícitamente utilizadas por los matemáticos prácticos, en cuyo caso es más probable que acaben siendo llevadas a la lpz por éstos que por los filósofos que estudien estas teorías más bien desde fuera que desde dentro. (El axioma de la elección, por ejemplo, lo hizo explícito el matemático Zermelo, y las reglas que rigen el

17 Véase, por ejemplo, el volumen sobre Einstein, de la *Library of Living Philosophers;* ed. Schilpp, Chicago, y *Observation and Interpretation,* ed. S. Kórner y M. H. Pryce, Londres, 1957.

análisis de exposición és o no un método filosófico fecundo, parece obvio que no toda filosofía, ni siquiera toda la que se practica con el nombre de filosofía analítica, es análisis de exposición. Los filósofos analíticos y otros consideran a menudo necesario ir más allá de la exposición de reglas y cambiarlas, conservando solamente, en particular, algúnas reglas tal como son, y sustituyendo las otras por otras más adecuadas, dependiendo el carácter adecuado de diversas circunstancias y propósitos. Así, por ejemplo, podría acaso sostenerse de modo perfectamente plausible que las antinomias teóricas de los conjuntos habían sido llevadas a luz por un análisis de exposición de la matemática clásica (y tal vez inclusive por las opiniones del sentido común), y que los problemas matemáticos y filosóficos que resultan de este descubrimiento incluyen el problema de una sustitución adecuada de algunas reglas que rigen el término "conjunto" y sus afines en la matemática clásica y en el lenguaje común por otros. Designo esta clase de análisis como "análisis de sustitución".

Así, pues, el análisis de sustitución consiste en sustituir un *analysandum* deficiente por un *analysans* sólido —un conjunto deficiente de reglas por otro sólido—, a condición, por supuesto, que el *analysans* y el *analysandum* tengan lo suficiente en común como para justificar que pueda siquiera hablarse de análisis. Si hemos de saber cuándo el análisis de sustitución ha sido fructífero, necesitamos ponernos de acuerdo acerca de; i] algunos criterios más o menos claros de solidez, y ii] una relación que habrá de ser cierta entre el analizando y el analizante. Así, pues, un problema presenta en el análisis de sustitución la siguiente forma general: dado un criterio de solidez de reglas que rigen conceptos y otros constituyentes preposicionales, y dada una relación analizante, sustituir una conjunción de reglas deficientes por una conjunción que sea sólida y que esté en la relación analizante con el conjunto deficiente. Los criterios de solidez y la relación analizante supuestos al efectuar el análisis de sustitución podrán acaso variar grandemente, y lo hacen en efecto, tanto en cuanto al contenido como en cuanto al grado de precisión con que están formulados; aquí, en efecto, lo que para uno resulta útil resulta fatal para otro. Se plantea

en informes sobre construcciones intuitivas, etc.— son todos ellos diagnósticos filosóficos, y cada uno de ellos conduce a un programa y su ejecución por una teoría matemática. Si se encuentra que el p; agrama no puede satisfacerse, se lo abandona o modifica. Sin embargo, dos o más programas incompatibles podrán ser acaso realizables todos ellos y su abandono o resurrección podrán deberse a argumentos filosóficos o inclusive a modas filosóficas.

Los análisis de sustitución o reconstrucciones de teorías matemáticas en el campo de los "fundamentos de la matemática" han sido, pues, una tarea conjunta de los matemáticos y los filósofos. La defensa de programas satisfactiblcs o de programas de los que no consta que no puedan satisfacerse procede en gran parte por medio de argumentación filosófica o, para servirnos de una palabra de la que se ha abusado mucho, de argumentación metafísica. Por otra parte, la ejecución o el intento de ejecución de un programa es una labor de matemática. En este ensayo he tratado de evitar, en conjunto, toda adición a los argumentos en favor o en contra de cualquier programa en vista de la fundamcntación de la matemática en un tipo de teoría básica. He tratado más bien de mostrar la relación entre los programas filosóficos y su ejecución matemática. En la medida en que esto se ha logrado, lo que se ha dado es un análisis de exposición de análisis filosófico-matematico de sustitución.

El objetivo principal ha sido, todo a lo largo, exponer, por una parte, algunas características generales de la reconstrucción de la matemática clásica en ejecución de diversos programas filosóficos y, por otra, exponer algunas características generales de las teorías de la matemática pura y aplicada hasta el presente construidas. Sin duda, el análisis habrá acaso fallado en todo o en parte, pero si actúa, con todo, como recordatorio de que la filosofía de la matemática no es ni matemática ni una mera popularización de la matemática, entonces habrá servido acaso a la causa no por completo olvidable de oposición al apartamiento generalizado de los filósofos con respecto a la filosofía.

proceso de sustitución son objeto de exposición actualmente por parte del matemático Curry.)

Cuando se llega a la caracterización general de los conceptos, las proposiciones y las teorías de la matemática pura, y a su comparación con otras clases de conceptos, proposiciones y teorías, resulta posible que encuentre más aplicación el análisis filosófico, especialmente el análisis de exposición. En cierto modo, el filósofo está profesionalmente interesado en comparar diversas disciplinas e investigaciones y en averiguar las relaciones entre ellas. El contenido del último capítulo de este ensayo está concebido como una pequeña contribución a un análisis de exposición de matemática pura y aplicada. Porque, si bien se sugiere en ocasiones que la sola materia de estudio del análisis es el lenguaje ordinario, y su solo instrumento también el lenguaje, esta opinión se me antoja a mí demasiado restringida. En efecto, no veo razón alguna del porqué la matemática, por ejemplo, no pueda ser la materia de estudio del análisis, o por qué, por ejemplo, la lógica de los conceptos inexactos no pueda utilizarse, en una presentación algo técnica, como instrumento de análisis.

Por lo que se refiere al análisis de sustitución, me he ocupado de él en los siete primeros capítulos de este libro. Cada una de las filosofías de la matemática .que he examinado declara que el todo o parte de la matemática clásica es deficiente en alguna forma, proclama la necesidad de sustituir las teorías matemáticas deficientes por otras sólidas y trata de satisfacer la necesidad mediante una construcción real. Todo el mundo está de acuerdo en que las antinomias de la teoría de los conjuntos son no sólo defectos obvios de la matemática clásica, sino también síntomas de defectos más profundos que cada uno diagnostica a su manera. Los argumentos empleados en el diagnóstico son principalmente, según vimos, argumentos filosóficos, esto es, argumentos que no pertenecen ni a las ciencias naturales ni a la lógica.

Los diagnósticos —por ejemplo, de que una matemática sólida ha de ser deducíble de principios "lógicos", de que ha de ser un formalismo cuya coherencia .se demuestra por métodos "finitos', o de que ha de consistir

consiguiente, el cuadrado de un número impar ha de ser impar. Por tanto, p se puede representar por 2r. Si sustituimos p por 2r en $p^2 — 2q^2$ t obtenemos $4r^2 — 2q^2$, *o* 2 2 = 2> Esto sólo puede ser así si q^2 y, por tanto, q mismo es par. Pero, si p y q son pares los dos, entonces tienen el divisor común 2, lo que es contrario al supuesto de que no tienen divisor común alguno. Se sigue de ahí que la solución $x^2 — 2$, esto es, x ~ V2 no puede ser un número racional. Así, pues, la práctica de tratar V2 y otros números análogos como si obedecieran a las leyes a las que obedecen los números racionales necesita justificación.

Si efectuamos la adición, la sustracción, la multiplicación y la división de números racionales en cualquier orden y cualquier número de veces, el resultado es a su vez un número racional. Pero, con respecto a la extracción de raíces (y a la formación de límites de series), el sistema de los números racionales no está igualmente "cerrado". Por consiguiente, Dedekind y Cantor trataron de construir una totalidad de entidades tales que: i] fueran cerradas con respecto a todas las operaciones mencionadas, y ii] que un subsistema suyo se "comportara" de acuerdo con todas las leyes que rigen a los números racionales. (O más precisamente, que el subsistema fuera isomórfico con el sistema de los números racionales.)

I] LA RECONSTRUCCIÓN DE DEDEKIND

La presentación de la teoría por Landau parte del supuesto de que la totalidad de los números naturales está dada y está caracterizada por los axiomas de Peano, esto es: i] 1 es un número natural; ii] Todo número natural x tiene un sucesor y sólo uno, x'; iii] No hay número alguno del que el sucesor sea 1; iv] Si $x' — y'$, entonces $x = y$; v] Si M es un conjunto de números naturales tales que: a] l pertenezca a M, y b] a condición de que x pertenezca a M, x^f pertenece asimismo a M, entonces M comprende todos los números naturales.[2] Estos axiomas se dejan formalizar y englobar fácilmente en, por ejemplo, *Principia Mathe-*

[2] El principio de inducción.

APÉNDICE A

DE LA TEORÍA CLÁSICA DE LOS NÚMEROS REALES

La teoría clásica de los números reales es en sí una reconstrucción de una teoría preclásica implícita en la obra de Newton, Leibniz y sus sucesores. Dos versiones equivalentes de ésta se deben a Cantor y Dedekind respectivamente, y se encuentran variantes de la misma en muchos libros de textos..modernos sobre la teoría de tas funciones.[1] \A1 presentar aquí fragmentos de estas teorías para el lector no matemático, seguiré a dichos autores. Es conveniente introducir al lector general en ambas teorías, toda vez que la revisión de Heyting, por ejemplo, de la teoría clásica toma la versión de Cantor como punto de partida, en tanto que la reconstrucción de 'Weyl empieza con una crítica de Dedekind.

La teoría preclásica surgió en tiempo de los griegos a partir del teorema de Pitágoras. Consideremos un triángulo rectángulo isósceles, cuyos lados iguales sean.de longitud 1 en algún sistema de medición. El largo de la hipotenusa x ~ VI- + 1* — V2 . Si *x* fuera racional, se lo podría representar por una fracción *pjq,* en donde *p* y *q* son, por supuesto, enteros positivos. Podemos suponer también que *p y q no tienen divisor común alguno.* (Si tienen un divisor común, siempre podemos efectuar la división, haciendo así que el numerador v el denominador sean "relativamente primos".)

De x ~ V2 , sustituyendo *x* por *p¡qf* obtenemos *pjq* = V2 y, por consiguiente $p^2/?^2$ " 2 , o $p^2 — 2q^2$, lo que significa que p^2 es divisible por 2, o sea par: porque un número impar multiplicado por un número impar y, por

[1] Un estudió completo de la teoría de Dedekind se encuentra en E, Landau, *Grundlagen der Analysis,* Leipzig, 1930, y de la de Cantor, en H. A. Thurston, *The Number-System,* Glasgow» 1956.

de una recta. Si dividimos esta recta en dos partes tales, que la parte que contiene los números racionales más pequeños no comprenda máximo alguno, obtenemos una representación del corte. El corte se designa también como la "clase inferior" (de la división), en tanto que su complemento se designa como la "clase superior". En forma correspondiente, los miembros de la primera se designan como miembros "inferiores", y los de la segunda como miembros "superiores". (Los cortes se designan con letras minúsculas griegas.)

Dos cortes, por ejemplo, £ y q, son iguales si y sólo si todo miembro inferior de £ es un número inferior de q y viceversa; ξ > q, si y sólo si | tiene un número inferior que es un número mayor de q; y £ < q si y sólo si q > Jj. Puede demostrarse que para dos cortes cualesquiera | y q, una y sólo una de las tres relaciones § —q, £ > q y § < q, ha de ser cierta. Se definen la adición y la multiplicación de los cortes y se demuestra que obedecen a las reglas familiares, (La definición de la adición se obtiene como sigue: i] Supongamos que | y q son cortes. El conjunto de todos los números racionales de la forma *X* + *Y*, con X número inferior de | e E número inferior de q, se demuestra ser un corte, ii] Se demuestra además que ningún número racional perteneciente a este conjunto puede estar representado como la suma de un número superior de £ y un número superior de q. Una vez demostrados i] y ii], el corte, tal como está construido, se designa como "la suma de ξ y q", o £ + q.)

Puede demostrarse que para todo número racional *R*, el conjunto de todos los números racionales <7? es un corte "racional", y que =, > y <, suma, diferencia, producto y cociente (allí donde existe) de cortes racionales corresponden a los conceptos empleados al tratar con los números racionales. "Por consiguiente, desechamos los números racionales, los sustituimos por los cortes correspondientes y, en adelante..., sólo hablamos de cortes. (Los números racionales subsisten, con todo, cual elementos de conjuntos utilizados al definir el concepto del corte.)"[4] Un corte que —como V2— no es racional, se designa como irracional.

•1 *Op. cit.*, **p. 64.**

matica. Puede mostrarse que las operaciones usuales para calcular con números naturales funcionan.

A continuación se introducen las fracciones como pares ordenados de números naturales. La equivalencia de las fracciones se define: x_1/x_2 es equivalente de y_1/y_2 si y sólo si $x_1 y_2 = y_1 x_2$. Las reglas generales que rigen el cálculo con fracciones se establecen por medio de definiciones y teoremas. Se introducen luego números racionales o, más exactamente, números racionales positivos. Un número racional es el conjunto de todas las fracciones que son equivalentes a una fracción fija. Así, por ejemplo, la clase {1/2, 2/4, 3/6, . . .} es un número racional. Se designa a un número racional como número entero si entre las fracciones que comprende (de las que es la clase) ocurre x/1, en donde *x* es un número natural. Se demuestra que los números enteros que forman una subclase del sistema de los números racionales tienen las mismas propiedades que los números naturales, esto es, que el sistema de los números naturales es isomórfico con el sistema de los números racionales. "Por consiguiente, desechamos los números naturales, los sustituimos por los números enteros correspondientes y hablamos en adelante (toda vez que también la fracción se hace superflua) . . . de números racionales solamente. (Los números naturales subsisten por pares, arriba y debajo del trazo, en la noción de fracción, y las fracciones subsisten cual elementos del conjunto, llamado número racional.) [3]

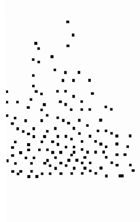
El paso decisivo en la reconstrucción de la teoría anterior de los números reales por Dedekind es la definición de un *corte* que (en la versión de Landau) se supone debe corresponder a la concepción ingenua de números reales positivos. Un corte es un conjunto de números racionales tal que: i] contiene algunos de los números racionales, pero no todos, ii] todo número racional perteneciente al grupo es más pequeño que todo número racional que no pertenece al mismo, y iii] que no contiene número racional máximo alguno. Puede obtenerse una representación gráfica de esta definición imaginando todos los números racionales positivos en su orden natural, marcados a lo largo

[3] **Landau,** *op. cit.*, **p. 41.**

sitivo £ hay un entero N tal, que $|x_p$ — xJ < £ para $p > N$ y $q > N$. Resulta útil concebir x_p y x_q como puntos a una distancia de x_ y x_q unidades del origen, y $|x_p$ — xd como la distancia entre ellos. La definición de la serie de Cauchy resulta así más gráfica: por muy pequeño que escojamos e, hay siempre un miembro x_N en la serie tal que la distancia entre dos cualesquiera de sus sucesores sea todavía más pequeña que £. (La operación de extraer la raíz cuadrada de 2 con uno, dos, etc., decimales, da una serie de Cauchy de números racionales.)

Las series de Cauchy -jx}- e -jy}- son *iguales* si y sólo si para cada e (positivo, racional) hay un entero N tal, que $|x_p - y_p| <$ e para $p > N$. En otros términos, lo que se requiere para poder declarar iguales a dos series de Cauchy es que la distancia entre miembros correspondientes pueda ser tan pequeña como se quiera, a condición de que se nos permita escoger para ellos un índice suficientemente grande.

El conjunto de todas las series de Cauchy que son iguales a una serie de Cauchy dada, por ejemplo {x}-, se define como el *número de Cauchy* x. (Esta definición es precisamente igual a la definición del entero de Frege, o a la definición de la dirección como el conjunto de todas las rectas paralelas a una recta dada.) Puede demostrarse que los números de Cauchy tienen todas las propiedades que los números reales han de tener, y pueden considerarse, por consiguiente, como reconstrucción de los números reales de la "teoría preclásica". Las definiciones y pruebas importantes no presentan dificultad. Inclusive sin entrar en detalles, dos características de la reconstrucción son perfectamente obvias, a saber: i] el supuesto de que el conjunto de todos los números racionales y todos sus subconjuntos están realmente dados, y ii] el carácter puramente existencia! —no-constructivo— de la definición de igualdad para dos números de Cauchy.



La totalidad de los cortes cumple todos los requisitos que ha de cumplir una reconstrucción adecuada de la totalidad de los números reales positivos. En este punto, Landau introduce el 0 y los números reales negativos, y demuestra que la nueva totalidad, que consta de los números reales positivos y negativos y de cero, se comporta en la forma debida. Los números reales se escriben con mayúsculas griegas, desechándose a su vez el sistema anterior de números reales positivos.

Veamos ahora el teorema central de la reconstrucción de los números reales por Dedekind. Dada una clasificación de *todos* los números reales en dos clases con las siguientes propiedades: i] hay un número en la primera clase y hay un número en la segunda clase, ii] cada número de la primera clase es más pequeño que cada número de la segunda clase, entonces sólo existe exactamente un número real 2 tal, que todo H < S pertenece a la primera clase, y todo H > E a la segunda. La prueba y la formulación del teorema presuponen que no se plantea problema alguno al hablar de todos los números reales o de una propiedad no especificada poseída por una subclase de todos los números reales y no por su complemento. “Para prevenir objeciones —Landau [5] lo subraya en su exposición—, *un* número, *ningún* número, *dos* casos, *todas* las cosas de entre una totalidad dada, etc., son claras formaciones de palabras...” Vimos que las objeciones no se habían prevenido y que hay que tomarlas en serio.

2] LA RECONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES POR CANTOR

Suponemos la totalidad de los números racionales como dada y las reglas para calcular con ellos como dadas y consideramos las series de números racionales de la forma: x_p x_2, . . . o, brevemente -|x¡-. Revisten especial interés entre ellas, para nuestros fines, las llamadas series de Cauchy, definidas como sigue: [6]

Una serie de números racionales x_p x_2, . . . es una serie de Cauchy si y sólo si para cada número racional no-cero po-

5 Prefacio, *op. cit.*
<>La definición es equivalente a la de la p. 160.

El primero de estos libros presta mayor atención a las cuestiones filosóficas que los otros dos'. El último contiene* un estudio a fondo del estado actual de la teoría de los conjuntos y pasa revista a los múltiples formalismos empleados por los lógicos matemáticos.

ni. *Libros de tendencia principalmente logicista*

Frege, G.: *Die Grundlagen der Arithmetik,* texto alemán y traducción inglesa de J. L. Austin, Oxford, 1950.

Frege, G.: *Translations from the philosophical writings of Frege,* por P. Geach y M. Black, Oxford, 1952.

Russell, B.: *Introduction to mathematical philosophy,* 29- ed., Londres, 1938.

Quine, W. V.: *From a logical point of view,* Cambridge, Mass., 1953. (Contiene "New foundations for mathematical logic")

Quine, W. V.: *Mathematical logic,* edición revisada, Cambridge, Mass., 1955.

Church, A.: *Introduction to mathematical logic,* vol. I, Princeton, 1956.

Los dos últimos son tratados recientes importantes.

iv. *Libros de tendencia principalmente formalista*

Hilbert, D. y Ackermann, W.: *Grundzüge der Theoretischen Logik,* 39- ed., traducido como *Principies of mathematical logic,* por L. Hammond, G. L. Leckie, F. Steinhardt, editado por R. E. Luce, Nueva York, 1950.

Curry, H. B.: *Outlines of formalist philosophy of mathematics,* Amsterdam, 1951.

Kleene, S. C.: *Introduction to metamathematics,* Amsterdam, 1952.

El último es un importante tratado reciente. El segundo expone y defiende una filosofía formalista de la matemática.

APÉNDICE B

ALGUNAS SUGERENCIAS DE LECTURAS ULTERIORES

Estas sugerencias se limitan a libros de fácil adquisición y que cubren los diversos temas de este ensayo. Pero aun así, se han omitido muchos textos excelentes. La mayoría de los que se mencionan contienen bibliografías útiles.

i. *Libros de matemática*

Landau, E.: *Grundlagen der Analysis,* traducido como *Foundations of analysis,* por F. Steinhardt, Nueva York, 1957.

Courant, R. y Robbins, H.: *What is mathematics?,* Oxford y Nueva York, 1941.

Young, J. W. A. (editor) : *Monographs on topics of modern mathematics relevant to the elementary field,* Londres, 1911, nueva edición, Nueva York, 1955.

Los dos últimos han sido escritos especialmente para el lector general. Dan una visión conjunta de las cuestiones principales que ocupan a los matemáticos prácticos contemporáneos y proporcionan una idea bastante exacta de su forma de razonar.

ii. *Obras generales sobre los fundamentos de la matemática*

Black, M.: *The nature of mathematics,* Londres, 1983.

Wilder, R. L.; *Introduction to the foundations of mathematics,* Nueva York, 1952.

Fraenkel, A. A., Bar-Hillel, Y.: *Foundations of set theory,* Amsterdam, 1958.

£

este libro se terminó de ímprí
el día 30 de septiembre de 196
en los talleres de litoarte, s. d
ferrocarril de cuerna vaca 683 i
méxico 17, d. f.
se imprimieron 5 000 ejemplar
y la composición,
de gráfica panamericana, s. d<
se hizo en tipos baskerville 9:!
se encuadernó en encuademací
dlscfió la portada: leopoldo 1¿
líi edición estuvo al cuidado d
WUtttí soler

v. *Libros de tendencia intuicionista*

Heyting, A.: *Intuitionism — An introduction,* Amsterdam, 1956.

Es la única obra introductoria extensa en inglés.

vi. *Otras obras*

Mostowski, A.: *Sentences undecidable in formalized arithmetic,* Amsterdam, 1952.

Tarski, A.: *InVroduction to logic and the methodology of deductive Sciences,* 2ª ed., Londres, 1946.

Este último es una de las mejores introducciones elementales a la lógica moderna.